Le Lemme de Simulation

Luigi Santocanale

30 septembre 2010

1 Rappels

Fixons $T = \langle \Sigma, Q, \Delta \rangle$ une machine de Turing et $w \in \Sigma^*$ un mot d'entrée.

Le langage

On construit un langage $\mathcal{L} = \langle X, F, P \rangle$ comme il suit :

- $F = \{ 0, s, p \}$, où 0 est une constante et s, p sont des symboles de fonctions unaires,
- $P = \{ =, < \} \cup Q \cup \Sigma_{\Box}$. Tout symbole de prédicat dans P est binaire. Dans tout modèle $\mathcal{M}$, la relation $=^{\mathcal{M}}$ sera l'identité :

$$=^{\mathcal{M}} := \{ (m, m) \mid m \in \mathcal{M} \} .$$

Dans la suite nous poserons, pour $n \in Z$,

$$s^n(x) = \begin{cases} \underbrace{s(s(\ldots s(x)\ldots))}_{n \text{ symboles } s} & n > 0 \\ x & n = 0 \\ \underbrace{p(p(\ldots p(x)\ldots))}_{-n \text{ symboles } p} & n < 0 \end{cases}$$

Les axiomes

Considérons maintenant les axiomes suivants :

$$\forall x . \neg x < x \tag{1}$$
$$\forall x, y, z.\ x < y \wedge y < z \implies x < z \tag{2}$$
$$\forall x, y.\ x < y \vee x = y \vee y < x \tag{3}$$
$$\forall x, y.\ s(x) = y \iff x = p(y) \tag{4}$$
$$\forall x.\ x < s(x) \tag{5}$$
$$\forall x, y.\ \neg(x < y \wedge y < s(x)) . \tag{6}$$

L'ensemble Z de tous les entiers, avec l'interprétation usuelle des symboles de fonction – s^Z est la fonction successeur et p^Z est la fonction prédécesseur – et des symboles des prédicat est certainement un modèle pour ce 6 axiomes. Tout autre modèle est (à isomorphisme près) une produit lexicographique d'un ordre linéaire avec Z. Soit ϕ_Z la conjonction de ces six axiomes.

Soit $w = \sigma_0\sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}$ le mot d'entrée et posons

$$\begin{aligned}\phi_w = q_0(0,0) \wedge \bigwedge_{i=0,\ldots,n-1} \sigma_i(0, s^i(0)) \\ \wedge \quad \forall y.\, y < 0 \implies \Box(0,y) \\ \wedge \quad \forall z.\, s^{n-1}(0) < z \implies \Box(0,z)\end{aligned}$$

Pour $(q,\sigma) \in Q \times \Sigma_\Box$ et $\Delta(q,\sigma) = (q',\sigma',d)$, posons

$$\phi_{q,\sigma} = \forall x,y.\, q(x,y) \wedge \sigma(x,y) \implies q'(s(x), s^d(y)) \wedge \sigma'(s(x),y)\,.$$

$$\begin{aligned}\phi_r &= \bigwedge_{\tilde\sigma \in \Sigma_\Box} \forall x,y,z.\ \ q(x,y) \wedge \tilde\sigma(x,y) \wedge y \neq z \implies \tilde\sigma(s(x),y) \\ \phi_\Delta &= \phi_r \wedge \bigwedge_{(q,\sigma)\in Q\times\Sigma_\Box} \phi_{q,\sigma}\,.\end{aligned}$$

Pour finir, soit

$$\phi_{T,w} = \phi_Z \wedge \phi_w \wedge \phi_\Delta \wedge \neg\exists x,y.\, q_f(x,y)\,.$$

Observons que $\neg\exists x,y.\, q_f(x,y)$ est équivalente à $\forall x,y.\, \neg q_f(x,y)$, et donc, $\phi_{T,M}$ est une conjonction de formules universelles (clôtures universelles de formules sans quantificateurs).

2 Preuve du Lemme de Simulation

Nous avons mentionné, en cours, la Proposition suivante :

Proposition 2.1. *Si $M \models \phi_{T,w}$, alors $T(w)\uparrow$.*

Pour prouver cette Proposition, nous aurons besoin du Lemme suivant :

Lemme 2.2 (Lemme de Simulation). *Soit $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \phi_{T,w}$, et supposons que*

$$C_0 \xrightarrow{t} (r,q,i)\,.$$

On a, alors,

$$\mathcal{M} \models q(s^t(0), s^i(0))\,.$$

En plus, pour tout $j \in Z$, si $r(j) = \tilde\sigma$, alors

$$\mathcal{M} \models \tilde\sigma(s^t(0), s^j(0))\,.$$

Avant prouver le Lemme, voyons comment il est d'aide à la preuve de la Proposition.

Preuve de la Proposition 2.1. La preuve de cette Proposition est par absurde : nous supposons que $T(w)\downarrow$ et arrivons à une contradiction.

Si $T(w)\downarrow$, c'est à dire, si

$$C_0 \xrightarrow{t} (r, q_f, i)$$

pour quelque t et quelque i, alors

$$\mathcal{M} \models q_f(s^t(0), s^i(0))$$

en utilisant le Lemme 2.2. Par conséquent

$$\mathcal{M} \models \exists x.\exists y.q_f(x, y)\,.$$

Nous supposons d'ailleurs que $\mathcal{M} \models \phi_{T,w}$ et donc $\mathcal{M} \models \neg\exists x.\exists y.q_f(x, y)$. On a ainsi

$$\mathcal{M} \models \exists x.\exists y.q_f(x, y) \wedge \neg\exists x.\exists y.q_f(x, y)\,,$$

évidemment, une absurdité. $\square$

Preuve du Lemme 2.2. La preuve est par induction sur t.

Si $t = 0$, alors $q = q_0$ est l'état initial et la la tête de lecture est positionnée sur 0, i.e. $i = 0$. Le lemme découle alors du fait que $\mathcal{M} \models \phi_w$, par exemple, $\mathcal{M} \models q_0(0, 0)$.

Supposons que $C_0 \xrightarrow{t+1} (r', q', i')$, c'est à dire

$$C_0 \xrightarrow{t} (r, q, i) \to (r', q', i')\,.$$

Si $r(i) = \sigma$ et $\Delta(q, \sigma) = (q', \sigma', d)$, on a alors

$$\begin{aligned} i' &= i + d \\ r'(i) &= \sigma' \text{ and } r'(j) = r(j) \text{ pour } j \neq i. \end{aligned}$$

Aussi, par hypothèse d'induction,

$$\mathcal{M} \models q(s^t(0), s^i(0)) \wedge \tilde{\sigma}(s^t(0), s^j(0))$$

si $\tilde{\sigma} = r(j)$. Rappelons que

$$\phi_\Delta \vdash q(x, y) \wedge \sigma(x, y) \to q'(s(x), s^d(y)) \wedge \sigma'(s(x), y)\,,$$

car $\Delta(q, \sigma) = (q', \sigma', d)$, d'où :

$$\mathcal{M} \models q'(s^{t+1}(0), s^{i+d}(0)) \wedge \sigma'(s^{t+1}(0), s^i(0))\,.$$

Rappelons aussi que

$$\phi_\Delta \vdash q(x,y) \wedge \tilde{\sigma}(x,z) \wedge y \neq z \to \tilde{\sigma}(s(x),z)\,, \qquad \text{pour tout } \tilde{\sigma} \in \Sigma_\square.$$

Etant donné que, pour $i \neq j$, on a

$$\mathcal{M} \models q(s^t(0)), s^i(0)) \wedge \tilde{\sigma}(s^t(0)), s^j(0)) \wedge s^i(0) \neq s^j(0)$$

où $\tilde{\sigma} = r(j)$, on déduit

$$\mathcal{M} \models \tilde{\sigma}(s^{t+1}(0)), s^j(0))\,.$$

En rappelant que $r(j) = r'(j)$ si $j \neq i$, on termine ansi la preuve du Lemme. $\square$