Chapitre 3

Calcul des prédicats

3.1 Introduction

Le calcul des propositions est bien trop limité pour décrire des situations réelles. En effet il ne permet que de décrire des phrases dont la vérité ne dépend pas des individus (par exemple « Il pleut ») ; il ne peut pas représenter des phrases qui mettent en jeu des individus ou des objets (par exemple « Si x est le père de y et si z est le père de x alors z est un grand-père de y » ou « Tout individu a un père »).

Le calcul des prédicats (ou Logique du Premier Ordre) permet d'exprimer de telles relations entre individus, il est donc bien plus riche que le calcul propositionnel. En premier lieux, il contient des individus (ou entités) (donnés par des symboles de variables $x, y, z, \ldots$). Il contient des fonctions $(f, g, \ldots, s, \ldots)$ permettant de transformer des entités en autres entités (par exemple la fonction qui associe une personne à son père), et des relations $(\ldots, P, Q, R, \ldots)$ permettant de lier les individus entre eux.

Les relations appliquées aux entités (par exemple $R(x, f(y))$) peuvent être évaluées à vrai ou faux (selon les valeurs attribuées aux entités, aux fonctions et aux relations) et servent de briques de base à un langage du premier ordre obtenu à l'aide des connecteurs logiques du calcul propositionnel et de deux autres connecteurs appelés quantificateurs.

Le calcul des prédicats est donc très similaire à celui des propositions. On aura des formules définies inductivement à partir des symboles de prédicats et de fonctions. On les interprétera dans divers mondes possibles et alors elles deviendront vraies ou fausses. On aura également un système formel correct et complet pour démontrer ou réfuter des formules.

Il y a néanmoins une différence algorithmique importante : le calcul des prédicat est indécidable : il est absolument impossible de vérifier qu'une formule est vraie pour toute interprétation. Ceci vient du fait que les interprétations comportent en général une infinité d'individus, il est alors difficile de vérifier que $\forall x \varphi$ puisque x peut prendre une infinité de valeurs différentes.

3.2 Préliminaires

On rappelle ici les notions de bases sur les fonctions et relations.

3.2.1 Les fonctions

Etant donné un ensemble E, et n un entier positif, une fonction n-aire (ou d'arité n) sur E est une fonction de E^n dans E. Une fonction n'est pas une forcément une application : elle peut être non définie pour certains éléments de E^n, dans ce cas on dira que c'est une fonction partielle.

Exemple 3.1.

1. $E = \{1, 2, 3\}$ et f est la fonction binaire (d'arité 2) définie pour tout couple $(a, b) \in E^2$ par :
   — $f(a, b) = 1$ si $a = 1$ et $b = 2$,
   — $f(a, b) = 2$ si $a = 2$ et $b = 3$,

— $f(a, b) = 3$ si $a = 3$ et $b = 1$,
— $f(a, b)$ est indéfinie sinon (i.e., pour les couples $(1, 1), (2, 2), (3, 3)(3, 2), (2, 1), (1, 3)$).

2. $E = \mathbb{N}$ et f est la fonction d'arité 1 définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n + 1$.

Une fonction d'arité 0 sur E est une constante $c \in E$.

3.2.2 Les relations

Etant donné un ensemble E, et n un entier positif, une relation n-aire (ou d'arité n) sur E est un sous-ensemble de E^n.

Exemple 3.2.

1. $E = \{1, 2, 3\}$ et R est la relation binaire (d'arité 2) définie par $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
2. $E = \mathbb{N}$ et S est la relation d'arité 2 définie par $S = \{(n, n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
3. $E = \{1, 2, 3\}$ et R est la relation unaire (d'arité 1) définie par $R = \{1, 2\}$.

Une relation d'arité 0 sur E est un ensemble vide puisque c'est un sous-ensemble de E^0.
Si R est une relation d'arité n, on note $R(a_1, \ldots, a_n)$ ssi $(a_1, \ldots, a_n) \in R$.

3.3 Un exemple

Avant d'en venir aux définitions formelles, considérons les formules suivantes :
$\varphi_G : \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \Rightarrow G(x, z)$
$\varphi_P : \forall x \exists y P(y, x)$
$\varphi_C : \forall x \exists y G(y, x)$
$\varphi_D : \forall x \forall z P(z, f(x)) \Rightarrow G(z, x)$
$\varphi_F : (\varphi_G \wedge \varphi_P) \Rightarrow \varphi_C$.
Il est ici impossible de donner une valeur de vérité à toutes ces formules, et ce pour différentes raisons :
— on ne sait pas dans quel ensemble D sont prises les valeurs x, y, z
— on ne connait pas la valeur de la fonction $f : D \to D$
— on ne connait pas la valeur des relations $P \subseteq D \times D$, et $G \subseteq D \times D$
Il est donc nécessaire de choisir une interprétation pour évaluer ces formules. Toutefois, nous verrons que c'est inutile pour la formule φ_F qui est vraie pour toute interprétation (c'est une tautologie, ou un théorème).
Considérons donc diverses interprétations de ces formules.

3.3.1 Interprétation 1

Les individus sont les êtres humains. La relation $P(x, y)$ signifie que x est le père de y. La relation $G(x, y)$ signifie que x est un grand-père de y. La fonction f associe à un individu sa mère.

φ_G signifie alors : pour tous êtres humains x, y, z, si (x est le père de y et y est le père de z) alors (x est un grand-père de z).

φ_P signifie : « pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le père de x » soit, plus simplement, « tout individu a un père ».

φ_C signifie que « pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le grand-père de x » soit, plus simplement, « tout individu a un grand-père ».

φ_D dit que si z est le père de la mère de x alors z est un grand père de x.

Ces quatre formules sont vraies dans cette interprétation [1].

L'implication $\varphi_F : ((\varphi_G \wedge \varphi_P) \Rightarrow \varphi_C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

On remarquera que les deux formules φ_P et φ_G sont loin de modéliser toutes les propriétés des relations G et P. On n'a pas dit que « le père de chaque individu est unique », ni qu'« un individu x peut-être le grand-père d'un autre z sans qu'il existe un individu dont x soit le père et qui soit le père de z » (le grand-père maternel).

1. Sauf peut-être φ_P : soit il y a un premier homme et celui-ci n'a pas de père, soit on se retrouve peu à peu, en remontant l'évolution, à inclure dans le genre humains des singes, des poissons, des bactéries, ...

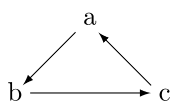
3.3.2 Interprétation 2

Les individus sont trois points a, b, c. On interprète les prédicats par les relations suivantes :

La relation P est vraie pour les couples (a, b), (b, c) et (c, a) et fausse pour les autres. En d'autres termes, $P(a, b)$, $P(b, c)$, $P(c, a)$ sont vraies, et $P(a, a)$, $P(a, c)$, $P(a, b)$, $P(b, b)$, $P(c, b)$, $P(c, c)$ sont fausses.

La relation G est vraie pour les couples (b, a), (c, b) et (a, c) et fausse pour les autres.

La fonction f est définie par $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(c) = a$.



En représentant a, b et c par les points suivants, $P(x, y)$ signifie « x précède immédiatement y » et $G(x, y)$ signifie « x suit immédiatement y ».

La formule φ_P signifie que tout point a un prédécesseur immédiat, et elle vraie.

La formule φ_G signifie que pour tous points x, y, z, si x précède immédiatement y et si y précède immédiatement z, alors x suit immédiatement z. Elle est également vraie.

Finalement la formule φ_C signifie que tout point a un successeur immédiat ; elle est également vraie.

L'implication $((\varphi_P \wedge \varphi_G) \Rightarrow \varphi_C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

La formule φ_D signifie que pour tout z et pour tout x, si z précède immédiatement $f(x)$, alors z suit immédiatement x. Elle est donc fausse : c précède $f(a) = a$ sans que c suive immédiatement a.

3.3.3 Interprétation 3

Les individus sont les quatre sommets a, b, c, d du graphe suivant : $\begin{array}{ccc} a & \rightarrow & b \\ \uparrow & & \downarrow \\ d & \leftarrow & c \end{array}$

$P(x, y)$ signifie que x précède immédiatement y sur le graphe.

$G(x, y)$ signifie que x suit immédiatement y sur le graphe.

La formule φ_P signifie que tout point a un prédécesseur immédiat, et elle vraie.

La formule φ_G signifie que pour tous points x, y, z, si x précède immédiatement y et si y précède immédiatement z, alors x suit immédiatement z. Elle est fausse. Finalement la formule φ_C signifie que tout point a un successeur immédiat. Elle est également vraie.

L'implication $((\varphi_P \wedge \varphi_G) \Rightarrow \varphi_C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

3.3.4 Interprétation 4

Les individus sont encore les quatre sommets a, b, c, d du graphe précédent.

$P(x, y)$ signifie que x précède immédiatement y. $G(x, y)$ signifie que pour aller de x à y on rencontre exactement un point z différent de x et de y.

La formule φ_P signifie que tout point a un prédécesseur immédiat, et elle vraie.

La formule φ_G signifie que pour tous points x, y, z, si x précède immédiatement y et si y précède immédiatement z, alors x suit immédiatement z. Elle est vraie.

Finalement la formule φ_C signifie que tout point a un successeur immédiat. Elle est également vraie.

L'implication $((\varphi_P \wedge \varphi_G) \Rightarrow \varphi_C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

3.3.5 Interprétation 5

Les individus sont les nombres entiers positifs.

$P(x, y)$ signifie que $x = y + 1$. Par exemple $P(5, 4)$ est vraie, mais $P(4, 5)$ est fausse.

$G(x, y)$ signifie que $x = y + 2$. Par exemple $P(6, 4)$ est vraie, mais $P(4, 6)$ est fausse.

La formule φ_P signifie alors que pour tout entier y, il existe un entier x tel que $x = y + 1$. Elle est vraie.

La formule φ_G signifie que pour tous entiers x, y, z, si $x = y + 1$ et $z = y + 1$ alors $z = x + 2$. Elle est vraie.

Finalement la formule φ_C signifie que pour tout entier x, il existe un entier z tel que $z = x + 2$. Elle est vraie.

L'implication $((\varphi_P \wedge \varphi_G) \Rightarrow C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

3.3.6 Interprétation 6

Les individus sont les nombres entiers positifs.

$P(x, y)$ signifie que $y = x + 1$. Par exemple $P(4, 5)$ est vraie, mais $P(5, 4)$ est fausse.

$G(x, y)$ signifie que $y = x + 2$. Par exemple $P(4, 6)$ est vraie, mais $P(6, 4)$ est fausse.

La formule φ_P signifie alors que pour tout entier y, il existe un entier x tel que $y = x + 1$. Elle est fausse : pour $y = 0$ un tel entier positif n'existe pas.

La formule φ_G signifie que pour tous entiers x, y, z, si $y = x + 1$ et $z = y + 1$ alors $z = x + 2$. Elle est vraie.

Finalement la formule φ_C signifie que pour tout entier x, il existe un entier z tel que $x = z + 2$. Elle est fausse : pour $x = 0$ il n'existe pas de tel entier positif.

L'implication $((\varphi_P \wedge \varphi_G) \Rightarrow \varphi_C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

3.3.7 Comparaison des interprétations

On est donc tout à fait libre d'interpréter les formules dans un « monde » de son choix, de sorte que certains énoncés deviennent vrais ou faux. On remarque néanmoins que pour chacune des interprétations considérées, l'implication $((\varphi_P \wedge \varphi_G) \Rightarrow \varphi_C)$ est vraie. Ce n'est pas un hasard, cette formule est une tautologie du calcul des prédicats. Elle est vraie dans toute interprétation.

3.4 Expressions et formules

3.4.1 Les termes

Définition 3.3 (Signature)**.** Une *signature* est un ensemble $\mathcal{S}$ de symboles muni d'une application $\rho : \mathcal{S} \to \mathbb{N}$, appelée *arité*.

On écrira une signature comme un ensemble liste de couples. Par exemple, $\{ (f, 2), (g, 1), (h, 0) \}$ est la signature dont les symboles sont f, g, h, d'arité $2, 1$ et 0, respectivement. Formellement, on a ici $\mathcal{S} = \{ f, g, h \}$, $\rho(f) = 2$, $\rho(g) = 1$, $\rho(h) = 0$. Un symbole $f \in \mathcal{S}$ tel que $\rho(f) = 0$ est appellé *constante*.

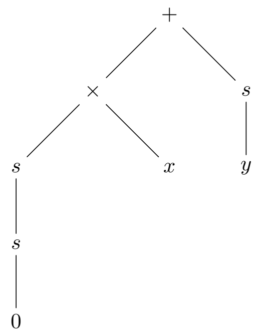
Définition 3.4 (Termes)**.** Étant donné une signature $\mathcal{S}$ et un ensemble X (de variables individuelles), l'ensemble $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(X)$ des termes est le plus petit ensemble tel que :

— $x \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(X)$ pour toute variable $x \in X$

— si $f \in \mathcal{S}$ est d'arité $n \geq 0$ et si $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(X)$, alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(X)$.

C'est-à-dire qu'un terme est une expression formée à partir de X en utilisant les symboles de $\mathcal{S}$ de sorte qu'un symbole f soit appliqué à un nombre de termes égal à $\rho(f)$. En particulier, si $f \in \mathcal{S}$ est une constante, alors elle s'applique a une liste vide de termes : $f()$ est un terme ; pour simplifier la notation, on écrit également f. Un terme est dit **clos** si il ne contient aucune variable.

Exemple 3.5. La signature de l'arithmétique contient la constante 0, le symbole s d'arité 1 (qui représente la fonction « successeur »), et les symboles $+$ et $\times$ d'arité 2. On emploie la notation $\mathcal{S} = \{(0, 0), (s, 1), (+, 2), (\times, 2)\}$ pour représenter cette signature. Ainsi, pour $x, y \in X$, l'expression $+(\times(s(s(0)), x), s(y))$ (que nous nous autoriserons à écrire $(s(s(0)) \times x) + s(y))$ est un terme de $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(X)$ qu'on peut représenter par l'arbre suivant :



En fait, tout terme est un arbre à branchements finis. Leur hauteur (et donc leur taille) n'est par contre pas bornée car, par exemple,

$$s^n(0) := \underbrace{s(s(\ldots s}_{n\text{-fois}}(0)\ldots))$$

est un terme, pour tout $n \geq 1$.

Exemple 3.6. Le signature de la théorie des groupes est $\{\,(e,0),(inv,1),(*,2)\,\}$, où $*$ est l'opérateur de composition et inv est l'opérateur « inverse » qui est habituellement noté x^{-1}.

3.4.2 Le langage

Définition 3.7 (Langage)**.** Un *langage* (ou *vocabulaire*) du premier ordre est la donnée d'un couple de signatures $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{\mathtt{f}}, \mathcal{S}_{\mathtt{r}})$ disjointes (i.e. avec $\mathcal{S}_{\mathtt{f}} \cap \mathcal{S}_{\mathtt{r}} = \varnothing$).

On dit que :
— Les elements de $\mathcal{S}_{\mathtt{f}}$ sont les *symboles de fonction* du langage.
— Les elements de $\mathcal{S}_{\mathtt{r}}$ sont les *symboles de relation* (ou de prédicat) du langage.

Remarque 3.8.

1. Rappelons qu'une constante est un symbole (de fonction) d'arité 0.
2. On considérera (sauf mention contraire) que chaque langage contient le symbole de relation binaire $=$ et un symbole de relation d'arité 0, $\perp$ qui représentera le faux. Un langage contenant le symbole binaire $=$ sera appelé **langage égalitaire**.
3. Le rôle des relations et des fonctions est très différent. Les fonctions et constantes seront utilisés pour construire les termes (i.e., les objets du langage) tandis que les relations serviront à construire des formules (i.e., des propriétés sur ces objets)

   Par exemple $1+2$ est un terme, il désigne un objet, tandis que $1+2=3$ désigne une formule logique.

Exemple 3.9.

1. Le langage $\mathcal{L}_1$ de la théorie des groupes contient les symboles
   — de constante : e ;
   — de fonction : $*$ (binaire) et inv (unaire) ;
   — de relation : $=$ (binaire).
2. Le langage $\mathcal{L}_2$ de la théorie des ensembles contient les symboles
   — de constante : $\varnothing$;
   — de fonction : $\cap$ et $\cup$ binaires, C unaire (le complément) ;
   — de relation : $=$, $\in$ et $\subset$, tous binaires. [2]

2. En fait, en théorie des ensembles, seulement les symboles $=$ et $\in$ sont considérés élémentaires. Les autres se définissent à partir de ces deux.

3.4.3 Les formules du calcul des prédicats

Etant donné un langage $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{\mathtt{f}}, \mathcal{S}_{\mathtt{r}})$, on construit les formules de la logique du premier ordre en utilisant les connecteurs de la logique propositionnelle et deux quantificateurs : $\forall$ et $\exists$.

Les formules sont construites à partir des formules atomiques, qui sont elles mêmes construites à partir des termes. Une formule atomique est obtenue en appliquant un symbole de relation à des termes.

On se fixe pour toute la suite un ensemble $X = \{x, x_0, x_1, \ldots, y, y_0, y_1, \ldots, z, z_0, z_1, \ldots\}$ de variables.

Définition 3.10 (Formules atomiques)**.** Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{\mathtt{f}}, \mathcal{S}_{\mathtt{r}})$ un langage, une formule atomique sur $\mathcal{S}$ est une expression de la forme suivante :
— $r(t_1, \ldots, t_n)$ où $r \in \mathcal{S}_{\mathtt{r}}$ est d'arité $n \geq 0$ et $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}_{\mathtt{f}}}(X)$ sont des termes.

Définition 3.11 (Formules)**.** Etant donné un langage $\mathcal{S}$, l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$ des formules du premier ordre sur $\mathcal{S}$ est le plus petit ensemble tel que :

1. toute formule atomique sur $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$,
2. si φ, $\psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$ sont deux formules alors :
   — $\varphi \wedge \psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$,
   — $\varphi \vee \psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$,
   — $\varphi \Rightarrow \psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$,
   — $\neg\varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$,
3. si $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}$ et $x \in X$ alors
   — $\forall x \varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$,
   — $\exists x \varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$.

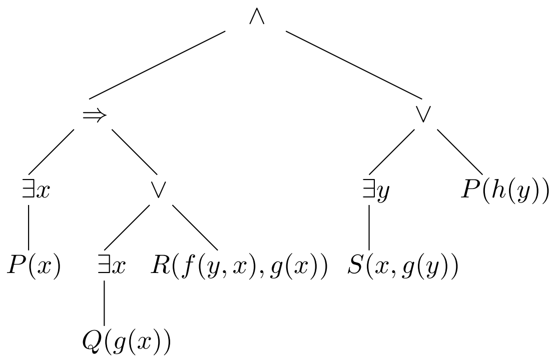
Exemple 3.12. Reprenons les langages de l'exemple 3.9 :

1. Dans $\mathcal{L}_1$, $x * y = e$, $y * x = e$, $x = e$, $y = e$ et $y * x = e$ sont des formules atomiques. Par conséquent, $\forall x \exists y((x * y = e) \wedge (\neg(y * x = e)))$ et $\forall x((x = e) \vee \exists y((\neg(y = e)) \wedge (y + x = e)))$ sont des formules.
2. Dans $\mathcal{L}_2$, $\forall x \forall y(x \cap y = \varnothing \Rightarrow (x = \varnothing \wedge y = \varnothing))$ est une formule.

Remarquez que, comme pour les termes, les formules peuvent être vues comme des arbres dont les feuilles sont des formules atomiques et les noeuds sont les connecteurs et quantificateurs. Par exemple, la formule

$$[(\exists x P(x)) \Rightarrow (R(f(y,x), g(x)) \vee [\exists x Q(g(x))])] \wedge [(\exists y S(x, g(y))) \vee P(h(y))] \tag{3.1}$$

sera représentée **de façon unique** par l'arbre suivant :



3.4.4 Occurrences libres et liées d'une variable

Lorsqu'une variable x appartient à une sous-formule précédée d'un quantificateur, $\forall x$ ou $\exists x$, elle est dite **liée** par ce quantificateur. Si une variable n'est liée par aucun quantificateur, elle est **libre**.

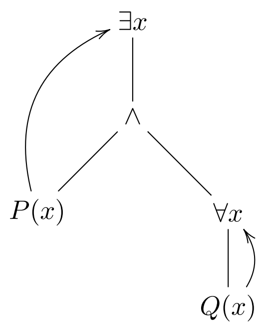
La distinction entre variable libre et variable liée est importante. Une variable liée ne possède pas d'identité propre et peut être remplacée par n'importe quel autre nom de variable qui n'apparaît pas dans la formule. Ainsi, $\exists x(x < y)$ est identique à $\exists z(z < y)$ mais pas à $\exists x(x < z)$ et encore moins à $\exists y(y < y)$.

L'ensemble des variables libres $\mathsf{FV}(\varphi)$ (depuis l'anglais, *free variable*), et l'ensemble des variables liées $\mathsf{BV}(\varphi)$ (depuis l'anglais, *bound variable*) [3] d'une formule φ sont définis par induction sur la structure de φ :

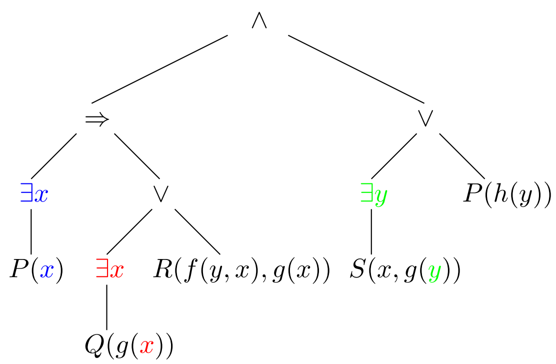
- si φ est une formule atomique, alors tout occurrence d'une variable x dans φ est libre : $\mathsf{FV}(\varphi) = Var(\varphi)$ et $\mathsf{BV}(\varphi) = \varnothing$.
- si φ est $\exists x\psi$ ou $\forall x\psi$, alors $\mathsf{FV}(\varphi) = \mathsf{FV}(\psi) - \{x\}$; $\mathsf{BV}(\varphi) = \mathsf{BV}(\varphi) \cup \{x\}$ (et toute occurrence de x **libre dans** ψ devient liée dans φ par le quantificateur introduit) ;
- si $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ (où $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$) alors $\mathsf{FV}(\varphi) = \mathsf{FV}(\varphi_1) \cup \mathsf{FV}(\varphi_2)$, $\mathsf{BV}(\varphi) = \mathsf{BV}(\varphi_1) \cup \mathsf{BV}(\varphi_2)$;
- si $\varphi = \neg\psi$, alors $\mathsf{FV}(\varphi) = \mathsf{FV}(\psi)$ et $\mathsf{BV}(\varphi) = \mathsf{BV}(\psi)$.

Définition 3.13 (Formule close)**.** Une formule φ est dite **close** ssi $\mathsf{FV}(\varphi) = \varnothing$.

Exemple 3.14. Une variable liée est attachée à une et une seule occurence d'un quantificateur dans la formule : celui qui dans l'arbre est son ancêtre le plus proche. Par exemple, considérons la formule $\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)$. Les variables sont liées de la façon suivante :

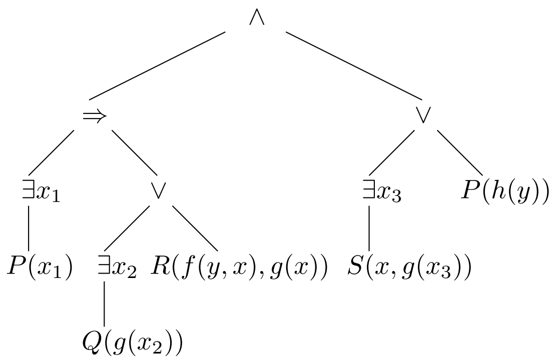


Exemple 3.15. Considérons la formule (3.1) et son arbre :



3. Nous ne pouvons pas utiliser un acronyme français, car on obtiendrait le même acronyme pour les variables libres et celles liées.

Les variables liées sont celles qui sont le descendant d'un quantificateur. Depuis l'exemple precedent, nous observons qu'il peut bien etre le cas que $\mathsf{FV}(\varphi) \cap \mathsf{BV}(\varphi) \neq \varnothing$. Nous verrons par la suite que les variables liées peuvent être renommée sans modifier la sémantique d'une formule, ceci par exemple pour éviter les ambiguités. Ainsi, nous pourrons toujours supposer que $\mathsf{FV}(\varphi) \cap \mathsf{BV}(\varphi) = \varnothing$. Par exemple, la formule précédente peut-être renommée de la façon suivante :



La nouvelle formule est donc

$$\{\,[\,\exists x_1 P(x_1)\,] \;\Rightarrow\; [\,(\exists x_2 Q(g(x_2))) \;\vee\; R(f(y,x), g(x))\,]\,\} \wedge [\,(\exists x_3 S(x, g(x_3))) \;\vee\; P(h(y))\,]$$

3.5 Sémantique

Jusqu'ici nous nous sommes contentés de définir la **syntaxe** des langages. Les formules n'ont encore aucune signification, en partie car nous n'avons pas donné de signification aux symboles des langages. Une signature ne donne qu'un ensemble de symboles, sans en donner d'interprétation.

3.5.1 Structures et valuations

Notation 3.16. Si D est un ensemble, alors D^n dénotera le produit cartésien de D avec lui-même n-fois. C'est l'ensemble des tuplets de longueur n dont les éléments sont tous tirés de D. Soit :

$$D^n = \underbrace{D \times D \times \ldots \times D}_{n\text{-fois}} := \{\,(d_1, d_2, \ldots, d_n) \mid d_i \in D, \text{pour } i = 1, \ldots, n\,\}\,.$$

Remarque 3.17. Remarquez que nous pouvons donner un sens à l'ensemble D^n avec $n = 0$:

$$D^0 := \{\,()\,\}\,.$$

En particulier, le lecteur observera que les fonctions $f : D^0 \to D$ sont en bijection avec les éléments $d \in D$ (via l'évaluation $f() = d \in D$). Nous allons donc identifier fonctions $f : D^0 \to D$ (elles sont les fonctions constantes, qui ne dépendent pas de paramètres) et éléments $d \in D$.

Pour donner une **sémantique** aux formules, il faut donc commencer par donner une signification aux éléments de la signature du langage. On fait cela en associant une **structure** au langage.

Définition 3.18. Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{\mathtt{r}}, \mathcal{S}_{\mathtt{f}})$ un langage. Une $\mathcal{S}$-structure (ou interprétation) $\mathcal{M}$ est la donnée d'un ensemble $D_{\mathcal{M}}$ et

(a) d'une relation $R^{\mathcal{M}} \subseteq D_{\mathcal{M}}^{\rho(R)}$, pour chaque symbole de relation $R \in \mathcal{S}_{\mathtt{r}}$;

(b) d'une fonction totale (application) $f^{\mathcal{M}} : D_{\mathcal{M}}^{\rho(f)} \to D_{\mathcal{M}}$, pour chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{S}_{\mathtt{f}}$.

Remarque 3.19. A cause de la remarque 3.17, la clause (b) dans la définition d'une $\mathcal{S}$-structure peut se rephraser comme suit :

(b.1) d'un élément $c^{\mathcal{M}}$ de $D_{\mathcal{M}}$, pour chaque symbole de constante (symbole de fonction d'arité 0) $c \in \mathcal{S}_{\mathtt{f}}$,

(b.2) d'une fonction totale (application) $f^{\mathcal{M}} : D_{\mathcal{M}}^{\rho(f)} \to D_{\mathcal{M}}$, pour chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{S}_{\mathtt{f}}$, tel que $\rho(f) \geq 1$.

Exemple 3.20. Supposons que le langage soit composé de la constante o et de la fonction unaire s. On peut choisir, par exemple, les structures suivantes :

1. $D_{\mathcal{M}}$ est l'ensemble des entiers naturels, $o^{\mathcal{M}}$ est le nombre 0 et $s^{\mathcal{M}}$ est la fonction donnant le successeur, c'est-à-dire $s^{\mathcal{M}}(n) = n + 1$;
2. $D_{\mathcal{M}}$ est un ensemble de personnes, $o^{\mathcal{M}}$ c'est Paul et $s^{\mathcal{M}}$ est la fonction donnant le père d'une personne.

Exemple 3.21. Supposons que $\mathcal{S}_{\mathtt{f}} = \{ (o, 0), (s, 1) \}$ et $\mathcal{S}_{\mathtt{r}} = \{ (\mathtt{Even}, 1) \}$. Comme auparavant, on peut choisir $D_{\mathcal{M}}$ est l'ensemble des entiers naturels, $o^{\mathcal{M}}$ est le nombre 0 et $s^{\mathcal{M}}$ est la fonction donnant le successeur. Pour compléter la définition de $\mathcal{S}$-structure nous pouvons poser

$$\mathtt{Even}^{\mathcal{M}} := \{ n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 2 = 1 \} .$$

Bien que la $\mathcal{S}$-structure ainsi définie puisse apparaître bien drôle (ou inappropriée), la définition de cette structure n'est pas incorrecte : *rien nous oblige à donner à un symbole une interprétation par défaut.*

La situation est assez différente quand le symbole d'égalité est parmi les symboles de relation. Dans ce cas, on interprétera, *par défaut*, la relation d'égalité sur l'image de la fonction diagonale :

$$=^{\mathcal{M}} := \{ (d, d) \mid d \in D_{\mathcal{M}} \} .$$

Exemple 3.22. Supposons que le langage est composé du symbole de relation B d'arité 2.

On peut choisir par exemple les interprétations suivantes :

1. $D_{\mathcal{M}}$, le domaine, est l'ensemble des sommets du graphe

$$\begin{tikzcd} \mathrm{a} \arrow[r] & \mathrm{b} \arrow[d] \\ \mathrm{d} \arrow[u] & \mathrm{c} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

et B est interprété comme la relation "flèche" : $B^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$

2. $D_{\mathcal{M}}$, le domaine, est le même qu'aupravant, mais maintenant B est interprété comme la relation "ne pas être voisin direct" : $B^{\mathcal{M}} = \{(b, d), (d, b), (a, c), (c, a)\}$. Ce modèle, même s'il partage avec le précédent le domaine, est différent du précédent.
3. Le domaine est l'ensemble des triangles et B est la relation "avoir la même aire"

Exemple 3.23. Supposons que $\rho(R) \leq 2$ pour tout $R \in \mathcal{S}_{\mathtt{r}}$, et que $\rho(f) \leq 1$ pour tout $f \in \mathcal{S}_{\mathtt{f}}$. On peut représenter une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ comme un (sorte de) graphe orienté étiqueté :

— les noeuds du graphe sont les éléments du domaine $D_{\mathcal{M}}$;
— un noeud $d \in D_{\mathcal{M}}$ est étiqueté par $P \in \mathcal{S}_{\mathtt{r}}$ si $d \in P^{\mathcal{M}}$;
— un noeud $d \in D_{\mathcal{M}}$ est étiqueté par un symbole de constante $c \in \mathcal{S}_{\mathtt{f}}$ si $d = c^{\mathcal{M}}$;
— on met une arête de d vers d' si $(d, d') \in R^{\mathcal{M}}$, pour un quelque symbole de relation $R \in \mathcal{S}_{\mathtt{r}}$; une arête $d \to d'$ est étiqueté par les symboles $R \in \mathcal{S}_{\mathtt{r}}$ tels quel $(d, d') \in R$;
— on met une arête pointillée de d vers d' si $f(d) = d'$; une arête pointillée $d \to d'$ est étiqueté par les symboles $f \in \mathcal{S}_{\mathtt{f}}$ tels quel $f(d) = d'$;

Par exemple, si $\mathcal{S}_{\mathtt{r}} = \{ (P, 2) \}$ et $\mathcal{S}_{\mathtt{f}} = \{ (f, 1) \}$, alors la structure $\mathcal{M} = \langle D_{\mathcal{M}}, P^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}} \rangle$ avec

— $D_{\mathcal{M}} = \{a, b, c\}$,

— $P^{\mathcal{M}} = \{(a,b),(b,c),(c,a)\}$,
— $f^{\mathcal{M}} : a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto a$;
peut se représenter comme le graphe étiqueté de la figure 3.1.

Exemple 3.24. Voici quelques exemples de structures importantes :

Domaine	Fonctions	Relations	Nom
$\mathbb{N}$	$0, s, +$	$=, \leq$	Arithmétique de Presburger
$\mathbb{N}$	$0, s, +, \times$	$=, \leq$	Arithmétique de Peano
$\mathbb{R}$	$0, s, +, \times$	$=, \leq$	Théorie des rééls
$\{0\}$	$\varnothing$	$\{p_0, \ldots, p_n, \ldots\}$	Structure propositionnelle
$\mathcal{T}_{\mathcal{S}_\mathtt{f}}(\varnothing)$	$\hat{\mathcal{S}}_\mathtt{f}$	$\hat{\mathcal{S}}_\mathtt{r}$	Modèle de Herbrand

Dans le cas des modèle de Herbrand, le domaine est l'ensemble des termes définis sur un ensemble de variables vide. Une fonction $\hat{f} \in \hat{\mathcal{S}}_\mathtt{f}$ d'arité n associe aux termes $t_1, \ldots, t_n$ le nouveau terme $f(t_1, \ldots, t_n)$, et les relations sont quelconques.

Comme pour le calcul des propositions, on va définir l'interprétation d'une formule en fonction de l'interprétation des formules élémentaires (ici les formules atomiques). Pour qu'une formule soit évaluable à vrai ou faux (1 ou 0), il faut non seulement dire comment s'interprètent les prédicats et les symboles de fonctions, (ce qui est l'analogue d'interpréter les propositions pour le calcul propositionnel) mais aussi ce que valent les variables : en effet les formules peuvent contenir des variables libres, et on a besoin de connaître leur valeur pour que la formule soit évaluable. Bien sûr la valeur des variables liées n'intervient en rien dans le calcul de la valeur d'une formule.

Par exemple pour connaître la valeur de $P(x,y)$ il faut non seulement connaître la signification de P (donnée par la structure), mais aussi la valeur de x et de y qui sera donnée par une **valuation**. Dans la formule $\exists x P(x,y)$ il faut connaître la valeur P et celle de y (mais celle de x n'a aucune importance). Cependant, comme la valeur de $\exists x P(x,y)$ va être définie en fonction de la valeur de $P(x,y)$, on fera aussi intervenir la valeur de x, ou plus précisément les valeurs de $P(x,y)$ pour toutes les valeurs de x.

Nous allons donc définir la valeur d'une formule φ d'un langage $(\mathcal{S}, X)$ en fonction d'une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ et d'une valuation des variables.

Définition 3.25. Une **valuation** de l'ensemble X des variables individuelles dans une structure $\mathcal{M}$ est une fonction $\mathcal{V}$ de l'ensemble X vers le domaine de $\mathcal{M}$, soit $\mathcal{V} : X \to D_{\mathcal{M}}$.

Notation 3.26. Nous allons noter $\mathcal{V}[x := a]$ la valuation $\mathcal{V}'$ telle que $\mathcal{V}'(x) = a$ et $\mathcal{V}(y)' = \mathcal{V}(y)$ pour tout $y \in X \setminus \{x\}$. Autrement, pour tout $y \in X$:

$$\mathcal{V}[x := a](y) = \begin{cases} a\,, & \text{si } y = x\,, \\ \mathcal{V}(y)\,, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dira alors que $\mathcal{V}[x := a]$ est une variante en x de $\mathcal{V}$.

3.5.2 Evaluation

On définit maintenant la valeur $[\varphi]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ d'une formule φ en fonction d'une structure $\mathcal{M}$ et d'une valuation $\mathcal{V}$. On commence naturellement par donner la valeur des termes.

Définition 3.27. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{S}$-structure et $\mathcal{V}$ une valuation de X dans $D_{\mathcal{M}}$; la valeur d'un terme $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}_\mathtt{f}}(X)$, notée $[\,t\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ est un élément de $D_{\mathcal{M}}$ défini (par induction) par :
— pour toute variable $x \in X$, $[\,x\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = \mathcal{V}(x)$
— pour tout $f \in \mathcal{S}_\mathtt{f}$ d'arité $n \geq 0$, pour tous termes $t_1, \ldots t_n$,

$$[\,f(t_1, \ldots, t_n)\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} := f^{\mathcal{M}}([\,t_1\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}, \ldots, [\,t_n\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}})\,.$$

Remarque 3.28. La définition de l'évaluation pour un terme construit via un symbole de fonction peut se séparer en deux cas, selon l'arité du symbole :
— pour toute constante $c \in \mathcal{S}_\mathtt{f}$ (c'est-à-dire symbole de fonction d'arité 0), $[\,c()\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = [\,c\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} := c^{\mathcal{M}}$;

— pour tout $f \in \mathcal{S}_\mathbf{f}$ d'arité $n \geq 1$, pour tous termes $t_1, \dots t_n$, $[\, f(t_1, \dots, t_n)\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} := f^{\mathcal{M}}([\, t_1\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}, \dots, [\, t_n\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}})$.

Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{V}$ sont fixées, toute formule atomique prend la valeur 0 ou 1, selon la définition formelle suivante, qui suit l'intuition :

Définition 3.29. La valeur $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ d'une formule atomique φ est définie par :
— pour tout $R \in \mathcal{S}_\mathbf{r}$ d'arité n, pour tous termes $t_1, \dots, t_n$,
$[\, R(t_1, \dots, t_n)\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ ssi $([\, t_1\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}, \dots, [\, t_n\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}) \in R^{\mathcal{M}}$

Enfin, la valeur d'une formule est définie par induction sur la structure de la formule :

Définition 3.30 (Valeur d'une formule)**.** Etant donné un langage $\mathcal{S}$ et une formule φ de $\mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$, la valeur de φ pour la $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ et la valuation $\mathcal{V}$ est notée $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ et est définie de la façon suivante :
— $[\,\varphi \wedge \psi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ ssi $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ et $[\,\psi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$;
— $[\,\varphi \vee \psi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ ssi $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ ou $[\,\psi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$;
— $[\,\neg\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ ssi $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 0$;
— $[\,\varphi \Rightarrow \psi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 0$ ssi $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ et $[\,\psi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 0$;
— $[\forall x\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ si et seulement si pour tout $a \in D_{\mathcal{M}}$, $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} = 1$;
— $[\,\exists x\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ si et seulement s'il existe $a \in D_{\mathcal{M}}$ tel que $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} = 1$.

Remarque 3.31. Le quantificateur universel peut se considérer comme une sorte de grande conjonction. En fait, on a

$$[\forall x.\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = \min\{\,[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} \mid a \in D_{\mathcal{M}}\,\}\,.$$

De façon similaire, le quantificateur existentiel est une sorte disjonction :

$$[\,\exists x.\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = \max\{\,[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} \mid a \in D_{\mathcal{M}}\,\}\,.$$

Par ailleurs, il devient possible remplacer un quantificateur universel par un conjonction (de façon à simuler la logique du premier ordre par la logique propositionnelle) seulement si le domaine $D_{\mathcal{M}}$ est fini, et en plus il est fixé. Que dire si $D_{\mathcal{M}}$ est $\mathbb{N}$ ou si on se pose la question si $\forall x(x = x)$ est vraie dans n'importe quelle structure ?

On notera souvent $\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \varphi$ à la place de $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$.

On remarque que la valeur de $[\forall x\varphi]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ ou $[\,\exists x\varphi]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ ne dépend pas de $\mathcal{V}(x)$. Par suite, la valeur de $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$, où φ est une formule quelconque ne dépend pas de $\mathcal{V}(x)$ lorsque x est une variable liée. En particulier, si φ est une formule close (sans variables libres), alors $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ ne dépend pas de $\mathcal{V}$ et par conséquent on écrira $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M}}$ à la place de $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}}$ et $\mathcal{M} \models \varphi$ à la place de $\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \varphi$.

L'ordre d'apparition des quantificateurs dans une formule est important. Il détermine le sens de la formule. Si nous donnons au prédicat $p(x, y)$ la signification "x aime y", alors, nous obtenons des significations différentes pour la formule $Q_1xQ_2yp(x, y)$ (où Q_1 et Q_2 sont des quantificateurs).
— $\forall x\forall yp(x, y)$ tout le monde aime tout le monde
— $\exists x\forall yp(x, y)$ il existe des personnes qui aiment tout le monde
— $\exists y\forall xp(x, y)$ il existe des personnes aimées de tous
— $\forall x\exists yp(x, y)$ toute personne aime quelqu'un
— $\forall y\exists xp(x, y)$ toute personne est aimée par quelqu'un
— $\exists x\exists yp(x, y)$ il y a une personne qui aime quelqu'un.

On peut remarquer que les seuls cas où on peut échanger l'ordre des quantificateurs sans modifier le sens de la formule sont ceux où les quantificateurs sont identiques : $\exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi$ et $\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi$. C'est pourquoi en mathématique on écrit souvent $\exists xy\varphi$ ou $\forall xy\varphi$.

Exemple 3.32. Considérons la formule

$$\varphi := \forall x\exists y(\,P(x, f(y)) \vee P(y, f(x))\,)\,,$$

à évaluer dans $\mathcal{M} = \langle D_{\mathcal{M}}, P^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}\rangle$ où :

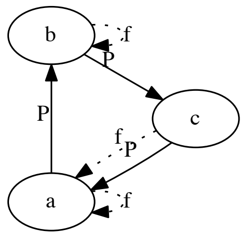


FIGURE 3.1 – Structure en forme de graphe étiqueté

— $D_{\mathcal{M}} = \{a, b, c\}$,
— $P^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$,
— $f^{\mathcal{M}} : a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto a$.

Cette structure, étant sur un langage relationnel d'arité au plus 2 et sur un langage fonctionnel d'arité au plus 1, est représentée en forme de graphe étiqueté en figure 3.1.

Pour trouver $[\varphi]_{\mathcal{M}}$ il faut considérer toutes les valuations possibles de x et de y, soient 9 valuations. Pour chaque valuation, nous pouvons évaluer la formule $(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))$, en évaluant d'abord les termes $x, f(x), y, f(y)$, pour ensuite évaluer la disjonction selon les règles usuelles de la logique propositionnelle. Nous avons donc :

— $\mathcal{V}_{aa} : x = a, y = a : [(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{aa}} = [\,P(a, a) \vee P(a, a)\,]_{\mathcal{M}} = 0$
— $\mathcal{V}_{ab} : x = a, y = b : [(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{ab}} = [\,P(a, b) \vee P(b, a)\,]_{\mathcal{M}} = 1$
— $\mathcal{V}_{ac} : x = a, y = c : [(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{ac}} = [\,P(a, a) \vee P(c, a)\,]_{\mathcal{M}} = 1$
— $\mathcal{V}_{ba} : x = b, y = a : [(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{ba}} = [\,P(b, a) \vee P(a, b)\,]_{\mathcal{M}} = 1$
— $\mathcal{V}_{bb} : x = b, y = b : [(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{bb}} = [\,P(b, b) \vee P(b, b)\,]_{\mathcal{M}} = 0$
— $\mathcal{V}_{bc} : x = b, y = c : [(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{bc}} = [\,P(b, a) \vee P(c, b)\,]_{\mathcal{M}} = 0$
— $\mathcal{V}_{ca} : x = c, y = a : [(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{ca}} = [\,P(c, a) \vee P(a, a)\,]_{\mathcal{M}} = 1$
— $\mathcal{V}_{cb} : x = c, y = b : [(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{cb}} = [\,P(c, b) \vee P(b, a)\,]_{\mathcal{M}} = 0$
— $\mathcal{V}_{cc} : x = c, y = c : [(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\mathcal{V}_{cc}} = [\,P(c, a) \vee P(c, a)\,]_{\mathcal{M}} = 1$

Commençons par étudier les valeurs possibles de la sous-formule $\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))$:

— $[\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\{x:=a\}} = 1$ car $[(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\{x:=a,y:=b\}} = 1$.
Donc pour toute valuation $\mathcal{V}$ telle que $\mathcal{V}(x) = a$, $[\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$.
— $[\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\{x:=b\}} = 1$ car $[(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\{x:=b,y:=a\}} = 1$.
Donc pour toute valuation $\mathcal{V}$ telle que $\mathcal{V}(x) = b$, $[\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$.
— $[\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\{x:=c\}} = 1$ car $[(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\{x:=c,y:=a\}} = 1$.
Donc pour toute valuation $\mathcal{V}$ telle que $\mathcal{V}(x) = c$, $[\exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$.

Donc pour toute valuation $\mathcal{V}$, nous avons $\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))$, i.e., $\mathcal{M} \models \forall x \exists y(P(x, f(y)) \vee P(y, f(x)))$.

Remarque 3.33. Observons que la notation $P(a, a)$ et les notations similaires sont impropres, mais très utiles en pratique, et aussi très utilisés par les logiciens ! ! ! En fait, $P(a, a)$ n'est pas une formule (atomique) du premier ordre, car ici a n'est pas un terme, mais plutôt un élément du domaine $D_{\mathcal{M}}$. Pour pouvoir justifier cette notation il faut ajouter au langage un symbole de constante c_a, pour tout élément du domaine $a \in D_{\mathcal{M}}$; en plus, nous devons étendre l'interprétation, de façon que $c_a^{\mathcal{M}} = a$.

3.5.3 Vocabulaire

Définition 3.34 (Modèle)**.** Soit $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$ une formule close (i.e., qui ne contient pas de variable libre) et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{S}$-structure. La structure $\mathcal{M}$ est un **modèle** de φ si $\mathcal{M} \models \varphi$.

Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$ un ensemble de formules closes (i.e., qui ne contient pas de variable libre) et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{S}$-structure. La structure $\mathcal{M}$ est un **modèle** de Γ si $\mathcal{M} \models \varphi$ pour tout $\varphi \in \Gamma$.

Définition 3.35 (Tautologie)**.** Une formule close $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$ est une **tautologie** si $\mathcal{M} \models \varphi$ pour toute $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$.

Définition 3.36 (Formule insatisfaisable)**.** Une formule close $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$ est **insatisfaisable** si elle n'a pas de modèle.

Définition 3.37 (Conséquence logique)**.** Une formule close φ est **conséquence logique** d'un ensemble de formules closes Γ si tout modèle de Γ est un modèle de φ. On écrit alors $\Gamma \models \varphi$.

Définition 3.38 (Equivalence)**.** Deux formules φ et ψ de $\mathcal{F}_{\mathrm{po}}(\mathcal{S})$ sont dites équivalentes (noté $\varphi \equiv \psi$) si pour toute $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ et toute valuation $\mathcal{V} : X \to D_{\mathcal{M}}$, on $\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \varphi$ ssi $\mathcal{M}, \mathcal{V} \models \psi$.

Définition 3.39 (Théorie)**.** Une théorie est l'ensemble des conséquences logiques d'un ensemble de formules closes. Par exemple, la théorie des groupes est l'ensemble des formules logiques qui sont vraies dans tous les groupes.

3.6 Manipulation de formules

3.6.1 Substitution de variables

Dans la suite, nos allons préciser ce que veut dire qu'une formule $\psi \in \mathcal{F}_{\text{po}}(\mathcal{S})$ est obtenue d'une formule $\varphi \in \mathcal{F}_{\text{po}}(\mathcal{S})$ en substituant toute occurrence d'une variable libre x par un terme (ce qui sera noté par $\psi = \varphi_{\{x \to t\}}$).

Remarque 3.40. Bien que la notion soit intuitive, il ne faut pas que des variables libres deviennent liées par cette substitution. Considérons ce qu'il se passe si l'on substitue de façon naïve x par le terme y dans $\exists y R(x, y)$. La formule $\exists y R(y, y)$ n'est pas le résultat souhaité. On souhaite plutôt avoir comme résultat la formule suivante : $\exists z R(y, z)$, d'où on devine la nécessite de renommer les variables de façon qu'une substitution ne crée pas des nouvelle variables liées.

Si σ est la substitution $\{x_1 \to t_1, \ldots, x_n \to t_n\}$, on note φ_σ la formule φ dans laquelle toutes les occurrences libres de $x_1, \ldots, x_n$ ont été remplacées respectivement par $t_1, \ldots, t_n$. Pour définir formellement la notion de substitution dans une formule, on commence par la définir pour les termes. Soit t un terme de $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(X)$ et σ une substitution :
— si $t = x$ et $x \in Dom(\sigma)$ alors $t_\sigma = \sigma(x)$,
— si $t = c$ alors $t_\sigma = c$,
— si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ alors $t_\sigma = f(t_{1\sigma}, \ldots, t_{n\sigma})$.
On définit maintenant la substitution par récurrence sur la structure de la formule :

$$\begin{aligned}
R(t_1, \ldots, t_n)_\sigma &:= R(t_{1\sigma}, \ldots, t_{n\sigma}), \\
(\varphi \circ \psi)_\sigma &:= (\varphi_\sigma) \circ (\psi_\sigma), \text{ pour tout connecteur binaire } \circ, \\
(Qx.\varphi)_\sigma &:= \begin{cases} Qx.(\varphi_{\sigma[x \to x]}), & \text{si } x \notin Im(\sigma) \\ Qy.(\varphi_{\{x \to y\}})_\sigma, & \text{si } x \in Im(\sigma), \text{ où } y \notin Var(\varphi) \cup Dom(\sigma) \cup Im(\sigma), \end{cases}
\end{aligned}$$

où $Q \in \{\exists, \forall\}$, et $\sigma[x \to x]$ est la substitution telle que $\sigma'(x) = x$, et $\sigma'(y) = \sigma(y)$ pour $y \neq x$.

Proposition 3.41. *Si $y \notin Var(\varphi)$, alors $\exists x \varphi \equiv \exists y(\varphi_{\{x \to y\}})$.*

Grâce à cette proposition, on pourra supposer désormais, sans perte de généralité, que les différentes occurrences liées d'une variables sont toutes liées au même quantificateur et qu'aucune variable n'admet à la fois des occurrences libres et des occurrences liées.

3.6.2 Equivalences classiques

Les équivalences données dans le cadre du calcul propositionnel restent vraies. Nous en donnons d'autres ici, les preuves sont laissées en exercice.

— Lois de conversion des quantificateurs :

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi, \qquad \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi.$$

— Lois de distribution des quantificateurs :

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x \varphi \wedge \forall x \psi), \qquad \exists x(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x \varphi \vee \exists x \psi).$$

— Lois de permutation des quantificateurs de même sorte :

$$\forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi, \qquad \exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi.$$

— Lois de réalphabétisation (renommage) des variables.
On peut toujours renommer une variable liée et la variable du quantificateur au sein d'une formule. Cependant, le nouveau nom ne doit pas être un nom déjà utilisé pour une variable libre ou liée de la formule.
Par exemple, dans $\exists x(\forall x F(x, y) \Rightarrow (G(x) \vee q))$, on peut opérer deux renommages : on peut renommer d'abord l'occurrence de x dans $F(x, y)$ à t, en obtenant ainsi $\exists x(\forall t F(t, y) \Rightarrow (G(x) \vee q))$, et ensuite renommer le x restant à z ; on obtient $\exists z(\forall t F(t, y) \Rightarrow (G(z) \vee q))$.

— Lois de passage : *si x ne figure pas à titre d'occurence libre dans ψ*, on a les lois suivantes :

$$\begin{array}{ll}
\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x\varphi) \wedge \psi & \exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\exists x\varphi) \wedge \psi \\
\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv (\forall x\varphi) \vee \psi & \exists x(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x\varphi) \vee \psi \\
\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \equiv (\exists x\varphi) \Rightarrow \psi & \exists x(\varphi \Rightarrow \psi) \equiv (\forall x\varphi) \Rightarrow \psi \\
\forall x(\psi \Rightarrow \varphi) \equiv \psi \Rightarrow (\forall x\varphi) & \exists x(\psi \Rightarrow \varphi) \equiv \psi \Rightarrow (\exists x\varphi)
\end{array}$$

Remarquez le changement de quantificateur dans les équivalences $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \equiv (\exists x\varphi) \Rightarrow \psi$ et $\exists x(\varphi \Rightarrow \psi) \equiv (\forall x\varphi) \Rightarrow \psi$.

Exemple 3.42. Nous pouvons démontrer l'équivalence entre les formules $\neg\forall x\varphi(x)$ et $\exists\neg\varphi(x)$ de la façon suivante. Soient $\mathcal{M}$ une $\mathcal{S}$-structure et $\mathcal{V}$ une valuation fixés.

(a) Supposons que $[\,\exists x\neg\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ et montrons que $[\,\neg\forall x\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$. De $\max_{a\in D_{\mathcal{M}}}[\,\neg\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} = 1$, nous déduisons que $[\,\neg\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} = 1$ pour un quelque $a \in D_{\mathcal{M}}$, donc $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} = 0$ et $[\forall x\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = \min_{a\in D_{\mathcal{M}}}[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} = 0$, donc $[\,\neg\forall x\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$.

(b) Supposons, par contre, que $[\,\neg\forall x\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$ et montrons que $[\,\neg\forall x\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$. On a bien que $[\forall x\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 0$; depuis

$$0 = [\,\forall x\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = \min_{a\in D_{\mathcal{M}}}[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} = 0$$

nous déduisons que ce minimum est réalisé : donc $[\,\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} = 0$ pour un quelque $a \in D_{\mathcal{M}}$, d'où $[\,\neg\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}[x:=a]} = 1$, et $[\,\exists x\neg\varphi\,]_{\mathcal{M},\mathcal{V}} = 1$.

Les argumentaires ci-dessus sont acceptés dans un cadre classique. L'argumentaire (b) se révèle par contre insatisfaisante, si depuis une preuve d'existence d'un objet avec une certaine propriété, nous souhaitons construire aussi un tel objet. Supposons, par exemple, que nous avons réussi à montrer que « non pour tout n, si n est premier, alors $n = 2^k - 1$ pour un nombre k ». L'argumentaire (b) prétend qu'il est possible déduire l'existance d'un nombre n qui n'est pas de la forme $2^k - 1$, mais ne spécifie d'aucune façon comment le construire. Pour cette raison, en *logique intuitionniste* (du premier ordre), qui se construit autour de l'idée qu'une preuve logique d'existence doit donner aussi un moyen de construire un objet témoignant l'existence, seule la formule $\exists x\neg\varphi \Rightarrow \neg\forall x\varphi$ est considérée une tautologie, la formule $\neg\forall x\varphi \Rightarrow \exists x\neg\varphi$ n'est pas considérée une tautologie. Voir par exemple [Miq05].

Exercice 3.43. Montrez que les formules $\forall x(\varphi \vee \psi)$ et $\forall x\varphi \vee \forall x\psi$ ne sont pas, en général, équivalentes. Argumentez de façon similaire pour $\exists x(\varphi \wedge \psi)$ et $\exists x\varphi \wedge \exists x\psi$.

3.6.3 Formes Normales

Établir la consistance d'une formule du calcul des prédicats est un problème difficile. On peut alors essayer de travailler sur une version de forme plus simple mais de consistance équivalente à la formule initiale. Nous introduisons dans cette section la forme clausale pour la logique des prédicats. Toute formule de la logique des prédicats du premier ordre admet une représentation sous forme de clause qui préserve sa satisfiabilité. À la différence des formes normales, une clause n'est pas logiquement équivalente à la formule dont elle dérive. Nous décrivons, à présent, les différentes étapes qui mènent à une représentation sous forme clausale.

3.6.3.1 Forme prénexe

Définition 3.44 (Forme prénexe)**.** Une formule φ est sous *forme prénexe* lorsqu'elle a la forme :

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\psi$$

où chaque Q_i est un quantificateur (existentiel ou universel), la partie $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n$ étant appelée *préfixe* et ψ étant qualifiée de *matrice* ne contient aucun quantificateur.

Mettre une formule sous forme prénexe consiste donc à renvoyer tous les quantificateurs au début de la formule.

Théorème 3.45 (Forme prénexe équivalente)**.** *Pour toute formule $\varphi \in \mathcal{F}_{po}$ il existe une formule équivalente $\psi \in \mathcal{F}_{po}$ en forme prénexe.*

L'algorithme de mise sous forme prénexe suit les étapes suivantes :

Etape 1 : Renommer les variables de façon à ce qu'aucune variable n'ait d'occurrence libre et liée et d'occurrences liées à des quantificateurs différents ;

Etape 2 : Appliquer tant que possible les substitutions suivantes : substitution du membre droit par le membre gauche pour toutes les lois de passage et de conversion des quantificateurs.

Exemple 3.46. Considérez la formule suivante :

$$\neg\exists x\forall y R(x,y) \wedge \forall x(\exists y R(x,y) \Rightarrow R(x,x))$$

La première étape, renommage des variables, donne la formule suivante :

$$\neg\exists z_0\forall z_1 R(z_0,z_1) \wedge \forall z_2(\exists z_3 R(z_2,z_3) \Rightarrow R(z_2,z_3))\,.$$

Nous appliquons ensuite la deuxième étape :

$$\begin{aligned}
&\neg\exists z_0\forall z_1 R(z_0,z_1) \wedge \forall z_2(\exists z_3 R(z_2,z_3) \Rightarrow R(z_2,z_2))\\
&\quad\rightsquigarrow \forall z_0\neg\forall z_1 R(z_0,z_1) \wedge \forall z_2(\exists z_3 R(z_2,z_3) \Rightarrow R(z_2,z_2))\\
&\quad\rightsquigarrow \underline{\forall z_0}\,\underbrace{\exists z_1\neg R(z_0,z_1)}_{\varphi} \wedge \underbrace{\forall z_2(\exists z_3 R(z_2,z_3) \Rightarrow R(z_2,z_2))}_{\psi}\\
&\quad\rightsquigarrow \forall z_0(\underline{\exists z_1}\,\underbrace{\neg R(z_0,z_1)}_{\varphi} \wedge \underbrace{\forall z_2(\exists z_3 R(z_2,z_3) \Rightarrow R(z_2,z_2))}_{\psi})\\
&\quad\rightsquigarrow \forall z_0\exists z_1(\underbrace{\neg R(z_0,z_1)}_{\psi} \wedge \underline{\forall z_2}(\underbrace{\exists z_3 R(z_2,z_3) \Rightarrow R(z_2,z_2)}_{\varphi}))\\
&\quad\rightsquigarrow \forall z_0\exists z_1\forall z_2(\neg R(z_0,z_1) \wedge (\underline{\exists z_3}\,\underbrace{R(z_2,z_3)}_{\varphi} \Rightarrow \underbrace{R(z_2,z_2)}_{\psi}))\\
&\quad\rightsquigarrow \forall z_0\exists z_1\forall z_2(\underbrace{\neg R(z_0,z_1)}_{\psi} \wedge \underline{\forall z_3}(\underbrace{R(z_2,z_3) \Rightarrow R(z_2,z_2)}_{\varphi}))\\
&\quad\rightsquigarrow \forall z_0\exists z_1\forall z_2\forall z_3(\neg R(z_0,z_1) \wedge (R(z_2,z_3) \Rightarrow R(z_2,z_2)))\,.
\end{aligned}$$

La nécessite de renommer les variables peut se comprendre si on essaie d'appliquer les règles de passage sans un renommage préalable. Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\neg\exists x\forall y R(x,y) \wedge \forall x(\exists y R(x,y) \Rightarrow R(x,x))\\
&\quad\rightsquigarrow \forall x\exists y\neg R(x,y) \wedge \forall x(\exists y R(x,y) \Rightarrow R(x,x))\\
&\quad\rightsquigarrow \forall x\exists y(\underbrace{\neg R(x,y)}_{\psi} \wedge \underline{\forall x}(\underbrace{\exists y R(x,y) \Rightarrow R(x,x)}_{\varphi}))
\end{aligned}$$

Ici on ne peut pas appliquer la loi de passage, donc on renomme :

$$\begin{aligned}
&\rightsquigarrow \forall x\exists y(\underbrace{\neg R(x,y)}_{\psi} \wedge \underline{\forall t}(\underbrace{\exists y R(t,y) \Rightarrow R(t,t)}_{\varphi}))\\
&\rightsquigarrow \forall x\exists y\forall t(\neg R(x,y) \wedge (\exists y R(t,y) \Rightarrow R(t,t)))\ldots
\end{aligned}$$

3.6.3.2 Forme de Skolem

Une formule est sous *forme de Skolem* lorsqu'elle est sous forme prenexe et qu'elle ne contient que des quantifications universelles. Pour effectuer une skolémisation, on part donc d'une formule sous forme prenexe et on supprime les quantifications existentielles.