TD n° 2

Calcul Propositionnel - Conséquences logiques

Dans toute cette planche, Σ et Γ désignent deux ensembles quelconques *(finis ou non, éventuellement vides) de formules. De même, φ et ψ dénotent deux formules propositionnelles quelconques.*

Rappels, notations. Soient deux ensembles A et B ;

— pour prouver que $A \subseteq B$, on montre que "pour tout élément a, si $a \in A$ alors $a \in B$"
— pour prouver que $A = B$ on montre que $A \subseteq B$ et que $B \subseteq A$
— $a \in A \cap B$ ssi $a \in A$ et $a \in B$
— $a \in A \cup B$ ssi $a \in A$ ou $a \in B$

On notera, dans la suite :

$$\text{Taut} = \{\, \varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}} \mid \ \mathsf{mod}(\varphi) = \mathsf{Val} \,\}, \qquad \text{NonSat} = \{\, \varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}} \mid \mathsf{mod}(\varphi) = \varnothing \,\},$$
$$\text{Cons}(\Sigma) = \{\, \varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}} \mid \Sigma \models \varphi \,\}.$$

Taut est l'ensemble des tautologies, NonSat est l'ensemble des formules non-satisfaisables, et Cons(Σ) est l'ensemble des conséquences logiques de Σ.

Exercice 2.1 On considère l'ensemble de formules propositionnelles

$$\Gamma = \{p \vee q \vee r,\ p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r\}$$

1. Trouver un modèle de Γ. Combien y a-t-il de modèles ?
2. Les formules $q \Rightarrow p$, p, r sont elles des conséquences logiques de Γ ?

Exercice 2.2 On se donne Γ un ensemble fini satisfaisable de formules, une formule φ conséquence de Γ, une formule ψ qui n'est pas une conséquence de Γ.

1. On ajoute une tautologie τ à Γ. Est-ce que φ et ψ sont des conséquences logiques de $\Gamma \cup \{\tau\}$? Donnez une preuve formelle.
2. Même question si τ est une formule insatisfaisable.

Exercice 2.3 Démontrer :

1. $\Sigma \models \varphi$ ssi $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$.
2. $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$ ssi $\Sigma \models \varphi \Rightarrow \psi$.
3. $\varphi \equiv \psi$ ssi $\text{Cons}(\varphi) = \text{Cons}(\psi)$.

Exercice 2.4 Démontrer :

1. $\Sigma \subseteq \Gamma$ implique $\mathsf{mod}(\Gamma) \subseteq \mathsf{mod}(\Sigma)$ (vu en cours) ;
2. $\Sigma \subseteq \Gamma$ implique $\text{Cons}(\Sigma) \subseteq \text{Cons}(\Gamma)$;
3. $\Sigma \subseteq \text{Cons}(\Sigma)$;
4. $\mathsf{mod}(\text{Cons}(\Sigma)) = \mathsf{mod}(\Sigma)$ (partiellement vu en cours) ;
5. $\mathsf{mod}(\Sigma) = \mathsf{mod}(\Gamma)$ ssi $\text{Cons}(\Sigma) = \text{Cons}(\Gamma)$;
6. $\text{Cons}(\text{Cons}(\Sigma)) = \text{Cons}(\Sigma)$;
7. $\mathsf{mod}(\Sigma) \subseteq \mathsf{mod}(\Gamma)$ ssi $\text{Cons}(\Gamma) \subseteq \text{Cons}(\Sigma)$.

Exercice 2.5 Démontrer, pour toute formule φ :

1. $\text{Taut} \subseteq \text{Cons}(\varphi)$.
2. $\varphi \in \text{Taut}$ entraîne $\text{Cons}(\varphi) = \text{Taut}$.
3. $\varphi \in \text{NonSat}$ entraîne $\text{Cons}(\varphi) = \mathscr{F}_{\text{cp}}$.
4. $\varphi \in \text{Taut}$ entraîne $\text{Cons}(\Gamma \cup \{\varphi\}) = \text{Cons}(\Gamma)$.
5. $\varphi \in \text{NonSat}$ entraîne $\text{Cons}(\Gamma \cup \{\varphi\}) = \text{Cons}(\varphi)$.

Exercice 2.6 Un ensemble de formules Γ est dit *complet* ssi

$$\Gamma \text{ est consistant et, pour tout } \varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}}, \Gamma \models \varphi \text{ ou } \Gamma \models \neg\varphi$$

1. Montrez que Γ est complet ssi il a un et un seul modèle.
2. Donnez l'exemple d'un ensemble complet et d'un ensemble non complet.
3. Si v est une une valuation, on appelle *théorie* de v, et on note $\text{TH}(v)$, l'ensemble des formules satisfaites par v. Autrement dit, $\text{TH}(v) = \{\varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}} \mid v(\varphi) = 1\}$. Montrez que, pour tout $v \in \mathsf{Val}$, $\text{TH}(v)$ est complet.
4. Montrez que $\text{Cons}(\text{TH}(v)) \subseteq \text{TH}(v)$.
5. Donnez l'exemple d'un ensemble complet qui n'est pas de la forme $\text{TH}(v)$.

Exercice 2.7 Soit Γ un ensemble complet tel que $\text{Cons}(\Gamma) \subseteq \Gamma$. Prouvez que :

1. $\varphi \in \Gamma$ ssi $\neg\varphi \notin \Gamma$,
2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ ssi $\gamma \in \Gamma$ et $\psi \in \Gamma$,
3. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ ssi $\gamma \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.