

**TD n° 4****Calcul Propositionnel : Algorithmes, Français, Modélisation**

**Exercice 4.1** (*Algorithme de Quine*). Transformez la formule suivante :

$$\varphi = (p \Rightarrow ((q \vee r) \wedge s)) \wedge \neg(q \Leftrightarrow (r \wedge (p \vee s)))$$

en forme normale conjonctive et appliquez ensuite l'algorithme de Quine pour trouver tous les modèles de  $\varphi$ .

**Exercice 4.2** (*Algorithme DPLL*). Transformez la formule suivante :

$$\varphi = \neg[(p \Rightarrow s) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow (s \wedge q \wedge r \wedge \neg p)))]$$

en FNC et appliquez ensuite l'algorithme de DPLL pour trouver un modèle. Répétez ensuite l'exercice avec la formule de l'exercice 4.1.

**Exercice 4.3** Montrez que, pour tout  $n \geq 1$ , il existe un ensemble de clauses  $\mathcal{C}_n$ , dont les symboles propositionnels sont  $\{p_1, \dots, p_n\}$  tel que l'arbre construit par l'algorithme de Quine est un arbre complet de profondeur  $n$  (donc, avec  $2^n$  noeuds) où, par contre, l'arbre exploré par l'algorithme DPLL est une branche de longueur  $n$  (donc, seulement  $n + 1$  noeuds sont explorés par l'algorithme).

**Exercice 4.4** Utiliser la méthode de la coupure pour prouver ou infirmer les affirmations suivantes.

1.  $\models p \Rightarrow p$
2.  $\models ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3.  $\models ((s \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg r \wedge \neg s \wedge p$
4.  $\models [(p \wedge q) \vee (r \wedge q)] \Rightarrow (p \vee r)$
5.  $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \Rightarrow r$
6.  $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \wedge r$
7.  $\models (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((\neg p \Rightarrow r) \wedge (p \wedge q))$ .
8.  $\models (p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (p \wedge q))$ .
9.  $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models p \wedge q \wedge r$ .
10.  $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ .

**Exercice 4.5** Alain, Baru et Carole sont prévenus de fraude fiscale. Ils prêtent serment de la façon suivante :

*Alain* : « Baru est coupable et Carole est innocente. »

*Baru* : « Si Alain est coupable alors Carole aussi. »

*Carole* : « Je suis innocente mais au moins un des deux autres est coupable. »

Exprimer le témoignage de chacun sous forme propositionnelle. Dresser la table de vérité de ces formules. Les témoignages sont-ils compatibles ? Le témoignage d'un suspect découle de celui d'un autre suspect ? Lequel ? En supposant que tous sont innocents, qui a fait un faux témoignage ?

**Exercice 4.6** L'association des Informaticiens de AMU est dirigée par trois directions : scientifique, financière, générale. Le règlement intérieur spécifie que :

— Les membres de la direction générale sont choisis parmi ceux de la direction financière.

— Nul ne peut être membre de la direction générale et de la direction scientifique s'il n'est pas membre de la direction financière.

— Aucun membre de la direction scientifique ne peut être membre de la direction financière.

1. Donner une spécification logique de ce règlement.
2. Proposer un règlement plus simple équivalent.

#### MODÉLISATION

**Exercice 4.7** On cherche à deviner la position d'un certain nombre de bateaux sur une grille de bataille navale à 2 lignes ( $a$  et  $b$ ) et 3 colonnes (1, 2 et 3). On dispose des informations suivantes :

1. Il y a au moins un bateau sur la ligne  $b$ .
2. Il y a au moins un bateau sur la ligne  $a$ .
3. Il n'y a pas deux bateaux sur une même colonne.
4. Il n'y a pas de bateau en  $(b, 1)$ .
5. S'il y a un bateau sur la ligne  $a$ , alors il n'y en a pas en  $(b, 3)$ .

En notant  $x_i$  l'information « il y a un bateau en position  $(x, i)$  » (pour  $x \in \{a, b\}$  et  $i \in \{1, 2, 3\}$ ), modélisez par une formule du calcul propositionnel les cinq affirmations ci-dessus, simplifiez au maximum l'ensemble des formules obtenues puis dessinez les modèles de cet ensemble.