TD n° 7

Premier-Ordre - Formes normales

FRANCAIS, MATHS, ET LOGIQUE

Exercice 7.1 On considère le langage $\mathscr{S} = (\varnothing, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ où

$$\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{\,(Mange, 2), (Herbivore, 1), (Vegetal, 1), (Bambou, 1), (Panda, 1)\,\}.$$

En utilisant ce langage, exprimez les énoncés suivants en logique du premier ordre.

1. Les herbivore ne mangent que des végétaux.
2. Aucun herbivore ne mange tout type de végétal.
3. Il y a des végétaux que ne mange aucun herbivore.
4. Les pandas sont des herbivores qui ne consomment que des bambous.

Exercice 7.2 Considérez l'ensemble de phrases en langue française suivantes :

1. Marseille est une ville qui se trouve au PACA.
2. Martigues est une ville qui se trouve au PACA.
3. Le Havre est une ville qui se trouve en Haute-Normandie.
4. Le Havre a un port.
5. Marseille est la ville plus grande du PACA.
6. Le PACA est un région de France.
7. Haute-Normandie est une région de France.
8. Haute-Normandie est eloignée du PACA.

Traduisez chaque phrase en logique du premier ordre. (Choisir d'abord le langage).

Exercice 7.3 Soit $\mathscr{S}$ le langage $(\varnothing, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ avec $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{\,(S,1), (\sqsubseteq, 2)\,\}$. Écrivez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. Le prédicat $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre partiel (réflexive, transitive et antisymétrique) ;
2. x est une minorant de y et z ;
3. x est la borne inférieure (le plus grand minorant) de y et z ;
4. x est la borne inférieure de S ;
5. S est fermé par le bas pour $\sqsubseteq$.

(Vous pouvez écrire $\sqsubseteq (x,y)$ en notation infixe $x \sqsubseteq y$).

Proposez une $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M}$ où $\sqsubseteq^{\mathscr{M}}$ est une relation d'ordre partiel et $S^{\mathscr{M}}$, étant fermé par le bas, n'a pas une borne inférieure.

Exercice 7.4 Soit $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ le langage tel que $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f,1),(g,1)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(p,1),(q,1),(r,2),(s,2),(t,2)\}$. Ecrivez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. La relation r est (le graphe d') une fonction totale ;
2. Le prédicat s contient le produit cartésien de p et q ;
3. le prédicat t est égal au produit cartésien de q et p ;

4. La fonction f est surjective ;
5. La fonction g est injective.

MODÈLES

Exercice 7.5 Considérez la formule φ suivante :

$$\exists x \forall y \neg(f(y) = x) \land \forall x g(f(x)) = x\,.$$

Argumentez que si $\mathscr{M}$ est un modèle de φ, alors $D_{\mathscr{M}}$ est un ensemble infini.

Exercice 7.6 Considérez la structure produite par `Mace4` :

```
============================== MODEL =================================

interpretation( 4, [number=1, seconds=0], [

        relation(<(_,_), [
                           0, 1, 1, 1,
                           0, 0, 1, 1,
                           0, 0, 0, 0,
                           0, 0, 1, 0 ]),

        relation(S(_,_), [
                           0, 1, 0, 0,
                           0, 0, 0, 1,
                           0, 0, 0, 0,
                           0, 0, 1, 0 ])
]).

============================== end of model ==========================
```

1. Représentez cette structure sous la forme de graphe étiqueté.
2. Trouvez un ensemble Γ de formules (de la logique du premier ordre) tel que si $\mathscr{M} \models \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \gamma$ et $D_{\mathscr{M}} = \{0,1,2,3\}$, alors $\mathscr{M}$ est la structure décrite dans le fichier output de `Mace4`.

FORMES NORMALES

Exercice 7.7 *(Forme prénexe).* Donner une forme prénexe des formules suivantes, en précisant les étapes de calcul :

1. $\exists x p(x) \Rightarrow \forall x p(x)$
2. $\exists x \forall y (\exists z P(x,y,z) \land Q(x,y)) \Rightarrow \exists y (\forall x P(x,z,y) \land \exists x Q(y,x))$

Exercice 7.8 *(Skolémisation).* Mettre en forme prénexe puis skolémiser les formules :

1. $\neg(\neg\varphi(x) \lor \forall x \psi(x)) \land (\exists x \varphi(x) \Rightarrow \forall x \tau(x))$
2. $(\exists x \forall y (\exists z P(x,y,z) \land Q(x,y))) \Rightarrow (\exists y (\forall x P(x,z,y) \land \exists x Q(y,x)))$

Exercice 7.9 *(Formes prenexes et clausales).*

1. Donner une forme prénexe de la formule suivante, en précisant les étapes de calcul :

$$(\exists x \forall y (\exists z P(x,y,z) \land Q(x,y))) \Rightarrow (\exists y (\forall x P(x,z,y) \land \exists x Q(y,x))).$$

2. Donner, sous forme d'ensemble de clauses, une forme clausale de la formule :

$$\begin{array}{ll} & \forall x \neg r(x,x) \\ \land & \exists x \forall y (r(x,y) \Rightarrow \neg \exists z r(z,x)) \\ \land & \forall x,y (r(x,y) \Rightarrow \exists z (r(x,z) \land r(z,x))). \end{array}$$