TD n° 9

Le calcul de la résolution – un peu d'induction

RÉSOLUTION

Exercice 9.1 Appliquez la règle de factorisation, de toute facon possible, aux clauses suivantes :

1. $\neg Q(g(y),x) \vee P(f(x),y) \vee P(y,f(x))$;
2. $\neg Q(x,y) \vee P(f(x),y) \vee P(x,g(z)) \vee P(f(w),y)$.

Exercice 9.2 Appliquez la règle de résolution, de toute façon possible, aux couples de clauses suivantes :

1. $\neg P(x) \vee P(f(x)) \vee R(y)$, $\neg P(y) \vee Q(y,g(y))$;
2. $\neg P(x) \vee Q(f(x))$, $\neg Q(y) \vee P(g(y))$.

Exercice 9.3 Considérez la formule suivante :

$$\begin{aligned}\Phi := \;& \forall x \neg R(x,x) \\ & \wedge \; \exists x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \neg \exists z R(z,x)) \\ & \wedge \; \forall x,y (R(x,y) \Rightarrow \exists z (R(x,z) \wedge R(z,x))) \, .\end{aligned}$$

1. Donnez, sous forme d'ensemble de clauses, une forme clausale de cette formule.
2. Enumérez toutes les règles du calcul de la résolution que vous pouvez appliquer à l'ensemble de clauses ainsi obtenu.
3. Appliquez ces règles pour engendrer des nouvelles clauses.

Exercice 9.4 Considérez l'ensemble de clauses suivantes :

$$\Gamma = \{ \quad P(c_0), \quad \forall x(\neg P(x) \vee x = c_1), \quad c_1 = c_2 \; \}$$

(a) Utilisez le calcul de la résolution pour montrer que la formule $c_0 = c_2$ n'est pas (contrairement aux attentes) une conséquence logique de Γ.

(b) Pour quelle raison le calcul de la résolution n'est pas capable d'inférer $c_0 = c_2$ depuis Γ ?

(c) Étant donné votre réponse à (b), expliquez comment on peut se servir de la résolution pour montrer que $c_0 = c_2$ est une conséquence logique de Γ.

Exercice 9.5 Montrez que la règle de coupure

$$\frac{C \vee P \qquad\qquad C' \vee \neg P}{C \vee C'}$$

est correcte. C'est-à-dire, montrez que, pour tout S-structure $\mathscr{M}$, si $\mathscr{M} \models C \vee P$ et $\mathscr{M} \models C' \vee \neg P$, alors $\mathscr{M} \models C \vee C'$. NB : faites attention aux quantificateurs implicites.

Exercice 9.6 Considérez l'ensemble de phrases en langue française suivantes :

1. Marseille est une ville qui se trouve au PACA.
2. Martigues est une ville qui se trouve au PACA.
3. Le Havre est une ville qui se trouve en Haute-Normandie.
4. Le Havre a un port.
5. Marseille est la ville plus grande du PACA.
6. Le PACA est un région de France.
7. Haute-Normandie est une région de France.
8. Haute-Normandie est eloignée du PACA.

Traduisez chaque phrase en logique du premier ordre. (Choisir d'abord le langage).

Exercice 9.7 On se propose de traduire de la langue francaise en logique du premier ordre les phrases suivantes :

1. Marcus était un pompéen.
2. Tous les pompéens étaient des romains.
3. César était souverain.
4. Tous les romains étaient fidèles à César ou le haissaient.
5. Chacun est fidèle à quelqu'un.
6. Les personnes n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles.
7. Marcus a essayé d'assassiner César.

Proposez :

(a) un langage du premier ordre pour modéliser ces phrases,

(b) pour chaque phrase, une formule en logique du premier ordre qui la traduit ;

(c) mettez chaque formule en forme clausale ;

(d) si vous connaissez déjà le calcul de la résolution : quelles sont les inférences que vous pouvez appliquer à ces clauses ?

INDUCTION SUR LES ENTIERS

L'ensemble des entiers se défini comme le plus petit ensemble N contenant 0 et stable par successeur (*i.e.*, tel que $n \in N$ impose $(n+1) \in N$). Soit $P(n)$ une propriété sur l'entier n. On prouve la propriété $P(n)$ est vraie de tout entier n en établissant que :

— $P(0)$ est vraie ;

— L'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout n. Pour cela, on fixe $n \geq 0$, on suppose que $P(n)$ est vraie (c'est l'hypothèse de récurrence) et on prouve qu'alors $P(n+1)$.

Exercice 9.8 Prouvez par induction que pour tout entier n : $0+1+2+....+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice 9.9 Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant, qui établit que « toutes les personnes d'un ensemble fini non vide ont les cheveux de la même couleur ». La preuve se fait par récurrence sur la cardinalité de l'ensemble.

1. Cas de base : $n = 1$. Une seule personne dans l'ensemble, la propriété est trivialement vraie.
2. Récurrence : on suppose la propriété vraie pour tout ensemble à n éléments et on montre qu'elle est vraie pour un ensemble E à $n+1$ éléments. On appelle $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$ les éléments de E.
   — par hypothèse de récurrence la propriété est vraie pour $e_2, \ldots, e_{n+1}$;
   — par hypothèse de récurrence la propriété est vraie pour $e_1, e_2, \ldots, e_n$;
   — donc e_{n+1} a la même couleur que e_2 qui a même couleur que $e_1, \ldots, e_n$ et donc tout le monde a la même couleur.

INDUCTION SUR LES FORMULES

La preuve par induction sert à prouver qu'une classe d'objets définie de manière inductive satisfait une propriété P. Les arbres et donc les formules sont des objets définis inductivement. Par exemple, l'ensemble des formules du calcul propositionnel sur l'ensemble de proposition PROP est le plus petit ensemble $\mathscr{F}_{\text{cp}}$ satisfaisant :

— si $p \in$ PROP alors $p \in \mathscr{F}_{\text{cp}}$

— si $\varphi \in \mathscr{F}_{\text{cp}}$ alors $(\neg\varphi) \in \mathscr{F}_{\text{cp}}$

— si $\varphi, \psi \in \mathscr{F}_{\text{cp}}$, alors $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$ et $(\varphi \Rightarrow \psi)$ appartiennent à $\mathscr{F}_{\text{cp}}$.

Pour prouver qu'une propriété P est vraie de toute formule propositionnelle, on procède de la façon suivante :

Cas de base : On montre que P est vraie pour toute proposition.

Pas d'induction : On montre que si φ et ψ satisfont P, alors $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ et $(\varphi \Rightarrow \psi)$ satisfont P.

Ceci repose sur le théorème suivant :

Théorème de décomposition unique Pour toute formule φ, un et un seul des cas suivants est vrai :

— φ est une variable propositionnelle

— il existe une formule ψ telle $\varphi = \neg\psi$

— il existe deux formules φ_1 et φ_2 telles que $\varphi = (\varphi_1 \circ \varphi_2)$ où $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$.

Une conséquence très importante de ce théorème est que la représentation d'une formule sous forme d'arbre est unique. Il y a donc un sens à définir par exemple la profondeur d'une formule.

Exercice 9.10 Rappelons que nous avons défini $SF(\varphi)$, l'ensemble des sous-formules de φ, par induction comme suit :

— $SF(p) = \{p\}$;

— $SF(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup SF(\varphi)$;
— $SF(\varphi \circ \psi) = \{\varphi \circ \psi\} \cup SF(\varphi) \cup SF(\psi)$ (où $\circ$ désigne un des symboles $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$).

Definissons maintenant $Var(\varphi)$ de cette façon :
— $Var(p) = \{p\}$;
— $Var(\neg\varphi) = Var(\varphi)$;
— $Var(\varphi \circ \psi) = Var(\varphi) \cup Var(\psi)$ (où $\circ$ désigne un des symboles $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$).

Montrez que

$$Var(\varphi) = \textsc{Prop}(\varphi),$$

où (rappellez vous) $\textsc{Prop}(\varphi) = \textsc{Prop} \cap SF(\varphi)$.

Exercice 9.11 Pour tout ensemble $X \subseteq \textsc{Prop}$ de propositions et toute valuation $v \in 2^{\textsc{Prop}}$, on note $v_{|X}$ la restriction de v à X. Soient v et v' deux valuations. Montrez par induction que pour toute formule φ du calcul propositionnel, pour tout ensemble $X \subseteq \textsc{Prop}$:

$$\text{si } \textsc{Prop}(\varphi) \subseteq X \text{ et } v_{|X} = v'_{|X} \text{ alors } v(\varphi) = v'(\varphi)$$

Ceci signifie que l'interprétation $v(\varphi)$ est indépendante des valeurs de v sur les variables propositionnelles qui n'interviennent pas dans φ.