1.7 Unification

1.7.1 Substitions et MGUs

Dans la suite, soit $\mathcal{S}_F$ une signature composée de symboles de fonctions seulement, et soit X un ensemble de variables.

Définition 1.27. Une substitution est une fonction $\sigma : X \to \mathcal{T}_{\mathcal{S}_F}[X]$, telle que $\{ x \in X \mid \sigma(x) \neq x \}$ est un ensemble fini.

On dénote une substitution de plusieurs façon, par exemple par

$$\{ x_1 \to \sigma(x_1), \ldots, x_n \to \sigma(x_n) \}, \quad \text{ou} \qquad [\sigma(x_1)/x_1, \ldots, \sigma(x_n)/x_n],$$

où $x_1, \ldots, x_n$ est la liste des variables qui ne sont pas fixées par σ (c'est-à-dire $\sigma(x_i) \neq x_i$).

Définition 1.28. Pour tout terme t, on définit l'action de σ sur t comme suit :

$$\begin{aligned} x\sigma &= \sigma(x) \\ f(t_1, \ldots, t_n)\sigma &= f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma). \end{aligned}$$

Exemple. On a

$$f(g(x), y)[z/x, g(y)/y] = f(g(z), g(y)), \qquad g(f(x, f(y, x)))[g(w)/x] = g(f(g(w), f(y, g(w)))).$$

Définition 1.29. La substitution *identité* (ou vide) est celle qui fixe toute le variables (notée donc []). La *composition* de deux substitutions σ et τ, notée $\tau \circ \sigma$, est la substitution définie par :

$$(\tau \circ \sigma)(x) = (\sigma(x))_\tau .$$

Exercice 1.30. Prouvez que la composition de substitutions est associative, et que la substitution identité est son un élément neutre. Prouvez les relations suivantes :

$$\begin{aligned} t[] &= t, \\ t(\tau \circ \sigma) &= (t\sigma)\tau. \end{aligned}$$

Définition 1.31. Soient σ et τ deux substitutions. On dit que σ est *plus générale* que τ (et on écrit $\sigma \leq \tau$), s'il existe une substitution ρ telle que $\tau = \rho \circ \sigma$.

Exemple. Soit

$$\begin{aligned} \sigma &= [f(w, x)/x, z/y], \\ \tau &= [f(g(y), x)/x, c/y]. \end{aligned}$$

On a alors $\sigma \leq \tau$, à cause de

$$\rho = [g(y)/w, c/z].$$

Définition 1.32. Un *problème d'unification* est une liste $(s_1, t_1), \ldots, (s_n, t_n)$ avec $s_i, t_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}_F}[X]$. Une solution de ce problème—appelé aussi *unificateur* de $(s_1, t_1), \ldots, (s_n, t_n)$—est une substitution σ telle que $s_i\sigma = t_i\sigma$, pour $i = 1, \ldots, n$. On notera $\mathsf{Unif}[\,(s_1, t_1), \ldots, (s_n, t_n)\,]$ l'ensemble des unificateurs $(s_1, t_1), \ldots, (s_n, t_n)$.

Exemple.

1. La substitution

   $$\sigma = [g(z)/x, g(z)/y].$$

   est un unificateur de $(f(x, g(z)), f(g(z), y))$, car

   $$f(x, g(z))[g(z)/x, g(z)/y] = f(g(z), g(z)) = f(g(z), y)[g(z)/x, g(z)/y].$$

2. Nous avons $\mathsf{Unif}[\,(f(x,y), g(z))\,] = \varnothing$. De même pour $\mathsf{Unif}[\,(x, g(x))\,]$.

Le but de cette section est de montrer le résultat suivant :

Proposition 1.33. *Si* $\mathsf{Unif}[\,(s_1,t_1),\ldots,(s_n,t_n)\,] \neq \varnothing$*, alors il existe* $\sigma \in \mathsf{Unif}[\,(s_1,t_1),\ldots,(s_n,t_n)\,]$ *tel que* $\sigma \leq \tau$ *pour tout* $\tau \in \mathsf{Unif}[\,(s_1,t_1),\ldots,(s_n,t_n)\,]$.

On appelle un tel σ un *unificateur le plus général* (raccourci : MGU, de l'anglais « Most General Unifier ».)

Exemple. $\tau = [g(f(w))/x, g(f(w))/y] \in \mathsf{Unif}[\,(f(x,g(z)), f(g(z),y))\,]$, mais τ n'est pas un MGU de ce probleme. En fait, $\sigma = [g(z)/x, g(z)/y]$ est un MGU, et on a $\sigma \leq \tau$, car $\tau = \rho \circ \sigma$, avec $\rho = [f(w)/z]$.

1.7.2 Algorithme d'unification

	UNIFIER
	Entrée : un problème d'unification $(s_1,t_1),\ldots,(s_n,t_n)$
	Sortie :
	un MGU de $(s_1,t_1),\ldots,(s_n,t_n)$ si $\mathsf{Unif}[\,(s_1,t_1),\ldots,(s_n,t_n)\,] \neq \varnothing$
	ECHEC, sinon
1	Si $n = 0$, retourner la substitution identité
2	Sinon, on analyse le couple (s_1,t_1) :
3	si $s_1 = f(r_1,\ldots,r_k)$ et $t_1 = g(r'_1,\ldots,r'_{k'})$ alors
4	si $f \neq g$, retourner ECHEC
5	sinon /* $f = g$ implique $k = k'$ */
6	retourner UNIFIER($(r_1,r'_1),\ldots,(r_k,r'_k),(s_2,t_2),\ldots,(s_n,t_n)$)
7	si s_1 est la variable x, alors :
8	si t_1 est aussi la variable x,
9	retourner UNIFIER($(s_2,t_2),\ldots,(s_n,t_n)$)
10	si $x \in VAR(t_1)$, retourner ECHEC
11	sinon,
12	soit τ le résultat de UNIFIER($(s_2[t_1/x], t_2[t_1/x]),\ldots,(s_n[t_1/x], t_n[t_1/x])$)
13	si $\tau =$ ECHEC, retourner ECHEC
14	sinon retourner $\tau \circ [t_1/x]$
15	si t_1 est la variable x, alors
16	traitement comme auparavant, avec s_1 à la place de t_1

Exemple. Considérez le problème suivant :

$$(f(x,g(z)), f(g(z),x))\,,\ (x,g(z))\,.$$

L'algorithme marche de la facon suivante :

Ligne appel récursif (ou return)	Entrée	Pile des résultats partiels
	$(f(x,g(z),f(g(z),x)),\ (x,g(z))$	
6	$(x,g(z)),\ (g(z),x),\ (x,g(z))$	
12	$(g(z),g(z)),\ (g(z),g(z))$	$[g(z)/x]$
6	$(z,z),\ (g(z),g(z))$	$[g(z)/x]$
9	$(g(z),g(z))$	$[g(z)/x]$
6	(z,z)	$[g(z)/x]$
9		$[g(z)/x]$
1		$[] \circ [g(z)/x]$

Exercice 1.34. Exercez vous maintenant avec les problèmes suivants :

1. $(f(g(k(x)),y), f(y,g(x)))$,
2. $(f(g(x),x), f(y,g(z))), (g(x),y))$,
3. $(f(y,k(y),g(x)), f(k(x),k(y),y))$.

Terminaison. Définissons la complexité d'un terme comme suit :

$$\sharp(x) = 1\,,$$
$$\sharp(f(t_1,\dots,t_n) = 1 + \sum_{i=1,\dots,n} \sharp t_i\,.$$

La complexité d'un problème est une couple de nombres entiers (non-négatifs) qui se défini comme suit :

$$\sharp((s_1,t_1),\dots,(s_n,t_n)) = (\,\mathrm{card}(\bigcup_{i=1,\dots,n} Var(s_i) \cup Var(t_i))\,,\ \sum_{i=1,\dots,n} \sharp(s_i) + \sharp(t_i)\,)\,.$$

Le lecteur notera qu'à chaque appel récursif, le problème en paramètre a complexité strictement plus petite par rapport à l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

1.7.3 Correction et completude

Nous souhaitons en fait prouver les propositions suivantes, dans lesquelles π dénotera un problème d'unification.

Proposition 1.35 (Correction)**.** *Si* $\mathsf{UNIFIER}(\pi)$ *retourne* ECHEC*, alors* $\mathsf{Unif}[\,\pi\,] = \varnothing$ *; si* $\mathsf{UNIFIER}(\pi)$ *retourne une substitution* σ*, alors* σ *est un* MGU *de* π*.*

Proposition 1.36 (Complétude)**.** *Si* $\mathsf{Unif}[\,\pi\,] = \varnothing$*, alors* $\mathsf{UNIFIER}(\pi)$ *retourne* ECHEC *; si* $\mathsf{Unif}[\,\pi\,] \neq \varnothing$*, alors* $\mathsf{UNIFIER}(\pi)$ *retourne un* MGU *de* π*.*

La preuve repose sur les lemmes suivants :

Lemme 1.37. *Les faits suivants sont vrais :*

1. *Si* $f \neq g$*, alors* $\mathsf{Unif}[\,(f(r_1,\dots,r_k), g(r'_1,\dots,r'_{k'}))\,] = \varnothing$*.*
2. *Si* $x \in Var(t)$*, alors* $\mathsf{Unif}[\,(x,t)\,] = \varnothing$*.*
3. *Si* $\mathsf{Unif}[\,(s,t))\,] = \varnothing$*, alors* $\mathsf{Unif}[\,(s,t),(s_2,t_2),\dots,(s_n,t_n)\,] = \varnothing$*.*

Lemme 1.38. *On a*

$$\begin{aligned}&\mathsf{Unif}[\,(f(r_1,\dots,r_k), g(r'_1,\dots,r'_k)),(s_2,t_2),\dots,(s_n,t_n)\,]\\ &\quad = \mathsf{Unif}[\,(r_1,r'_1),\dots,(r_k,r'_k),(s_2,t_2),\dots,(s_n,t_n)\,]\,.\end{aligned}$$

Lemme 1.39. *Supposons* $x \notin Var(t)$*. Un* MGU *de*

$$(x,t),(s_2,t_2),\dots,(s_n,t_n)$$

est $\rho \circ [t/x]$ *où* ρ *est un* MGU *de*

$$(s_2,t_2)[t/x],\dots,(s_n,t_n)[t/x]\,.$$

Si ce dernier problème ne possède pas de solutions, alors il en est de même pour $(x,t),(s_2,t_2),\dots,(s_n,t_n)$*.*

Ce Lemme est un conséquence de la Proposition suivante, en raison du fait que $[t/x]$ est évidemment un MGU du problème (x,t).

Exercice 1.40. A l'aide des Lemmes 1.37-1.39 complétez une preuve formelle de correction et complétude de l'algorithme d'unification.

Avant approcher la proposition, introduisons quelques notations qui nous sera outiles :

- $\Delta = \{\,(t,t) \mid t \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}_F}[X]\,\}$ et $\Delta^n = \underbrace{\Delta \times \ldots \times \Delta}_{n-\text{fois}}$,
- si $\pi = (s_1,t_1),\dots,(s_n,t_n)$, alors $\ell(\pi) = n$ et $\pi_\sigma = (s_1\sigma,t_1\sigma),\dots,(s_n\sigma,t_n\sigma)$.

Avec cette notation remarquez que

$$\sigma \in \mathsf{Unif}[\,\pi\,] \text{ ssi } \pi_\sigma \in \Delta^{\ell(\pi)} \,.$$

Proposition 1.41. *Soient π et ψ deux problemes d'unification. Supposons que σ est un* MGU *π. Alors*

$$\mathsf{Unif}[\,\pi,\psi\,] = \{\, \rho \circ \sigma \mid \rho \in \mathsf{Unif}[\,\psi_\sigma\,]\,\} \,.$$

Par conséquent, si ρ est un MGU *de ψ_σ, alors $\tau = \rho \circ \sigma$ un* MGU *de π, ψ.*

Démonstration. Observons que si $\tau \in \mathsf{Unif}[\,\pi,\psi\,]$ alors $\tau \in \mathsf{Unif}[\,\pi\,]$ et, par consequent, $\tau = \rho \circ \sigma$. Car $\tau \in \mathsf{Unif}[\,\psi\,]$, on remarquera que

$$(\psi_\sigma)_\rho = \psi_{\rho\circ\sigma} = \psi_\tau \in \Delta^{\ell(\psi)} \,,$$

donc ρ est un unificateur de ψ_σ, et $\tau \in \{\, \rho \circ \sigma \mid \rho \in \mathsf{Unif}[\,\psi_\sigma\,]\,\}$. D'autre part, si $\rho \in \mathsf{Unif}[\,\psi_\sigma\,]$, alors

$$\begin{aligned}
\psi_{\rho\circ\sigma} &= (\psi_\sigma)_\rho \in \Delta_{\ell(\psi)} \,, \\
\pi_{\rho\circ\sigma} &= (\pi_\sigma)_\rho \in (\Delta^{\ell(\pi)})_\rho \subseteq \Delta^{\ell(\pi)} \,,
\end{aligned}$$

donc $\rho \circ \sigma \in \mathsf{Unif}[\,\pi,\psi\,]$.

Soient ρ un MGU de ψ_σ et $\tau = \rho' \circ \sigma \in \mathsf{Unif}[\,\pi,\psi\,]$ avec $\rho' \in \mathsf{Unif}[\,\psi_\sigma\,]$; on a alors $\rho' = \theta \circ \rho$ et par consequent nous avons $\tau = \theta \circ \rho \circ \sigma$. Cela montre que $\rho \circ \sigma$ est un MGU de π, ψ. $\square$