Fiche de TP no. 3

Rappels

Urls de `Prover9` et `Mace4` :

http://www.cs.unm.edu/~mccune/mace4/
http://www.cs.unm.edu/~mccune/mace4/manual/2009-11A/

`Prover9` essaye de montrer que ϕ est une conséquence logique de Γ, en utilisant des méthodes basés sur la résolution. `Mace4` essaye de construire un modèle de Γ qui rend ϕ fausse.
Utilisation via la ligne de commande :

```
/opt/p9m4-v05/prover9-mace4.py
```

Exercice 1 : *Ensembles.* En théorie des ensembles, deux ensembles sont considéré égaux si et seulement si tout élément de l'un est élément de l'autre. Cette définition de l'égalité est formalisée par l'hypothèse :

```
all x all y (x = y <-> all z (element(z,x) <-> element(z,y))) .
```

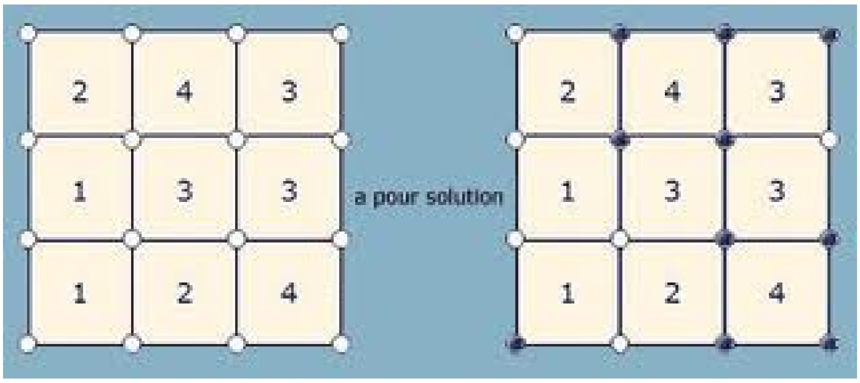
On dit qu'un ensemble est sous-ensemble d'un autre ensemble si tout élément de l'un est élément de l'autre.

1. Formalisez cette définition en notant par la formule `sousens(x,y)` le fait que x est sous-ensemble de y.
2. Montrez, grâce à `Prover9`, que ces deux définitions impliquent que la relation `sousens` est une relation d'ordre (réflexive, transitive, antisymétrique).
3. Montrez, grâce à `Mace4`, que la définition de l'égalité ci dessus est nécessaire afin que `sousens` soit une relation d'ordre. Identifiez quelle propriété, parmi réflexivité, transitivité, antisymétricite, n'est pas conséquence logique de la seule définition de `sousens`.
4. Montrez, grâce à `Mace4`, que la relation `sousens` n'est pas une relation d'équivalence. Étudiez le contre-modèle du but construit par `Mace4`.

Exercice 2 : *Partitions.* Rappelons que :
– une relation d'équivalence est une relation binaire R réflexive, symétrique et transitive ;
– une parition dún ensemble D est une collection de sous-ensembles de D non vides $\{ P_i \mid i \in I \}$ telle que $P_i \neq P_j$ implique $P_i \cap P_j = \emptyset$, et $D = \bigcup_{i \in I} P_i$.

1. Utilisez `Prover9` pour montrer que si R est une relation d'équivalence sur D, alors la collection de sous-ensembles $\{ P_d \mid d \in D \}$—où $P_d = \{ x \in D \mid R(d,x) \}$—est une partition de D.
2. Utilisez `Prover9` pour montrer que si $\{ P_d \mid d \in D \}$ est une partition de D telle que $d \in P_d$, pour tout $d \in D$, alors la relation R definie par $R(x,y)$ ssi il existe $d \in D$ tel que $x, y \in P_d$ est une relation d'équivalence sur D.
3. Argumentez donc que les relations d'équivalence R sur D sont en bijection avec les partitions $\{ P_d \mid d \in D \}$ telles que $d \in P_d$, pour tout $d \in D$.
4. Utilisez `Mace4` pour compter le nombre de partitions sur un ensemble donné, de taille 3 jusqu'à la taille 10.
   Vérifiez votre résultat en recherchant la suite de nombres ainsi construite sur *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, http://oeis.org/.

Exercice 3 : *le squareO.* Rappelez vous du jeu « *Le squarO* », depuis le TP 5.
Le jeu se déroule dans une grille de taille $n \times n$, avec un rond à chaque noeud de la grille. Le but est de noircir certains ronds de la grille en respectant des contraintes données, pour chaque case de la grille, par un chiffre entre 0 et 4 correspondant au nombre de coins de cette case à noircir. Voici un exemple de grille, avec une solution possible :



1. Proposez un ensemble de formules closes du premier ordre, de façon que qu'il a une correspondance bijective entre les modèles $\mathcal{M}$ tels que $D_{\mathcal{M}} = \{0, 1, 2, 3\}$, et les solutions de la grille ci-dessus.
2. En utilisany `Mace4`, comptez combien de solutions cette grille possède.

Exercice 4 : *Échecs.* Considérons un échiquier de taille $n \times n$. L'échiquier contient k pions blancs et k pions noirs (avec $k \leq n$). Voici les règles d'un jeu très simple :

1. Au debut du jeu, les pions blancs se trouvent à hazard sur la première ligne, et les pions noirs se trouvent à hazard sur la dernière ligne.
2. Les pions blancs et noirs peuvent avancer d'une case seulement (ne peuvent pas manger) ; s'il rencontrent un pion en face de l'autre couleur, alors il ne peuvent plus avancer.
3. Le blanc et le noir peuvent enchaîner des coups, sans donner la main à l'adversaire.

Décrivez une position via un ensemble de formules de la logique du premier ordre (de façon qu'il y aura une correspondance bijective entre les positions et les modèles $\mathcal{M}$ de cet ensemble de formules tels que $D_{\mathcal{M}} = \{0, 1, 2\}$.). Utilisez `Mace4` pur compter combien il y a de positions possibles dans le jeu si $n = 3$ et $k = 2$. Et si $n = 3$ et $k = 3$?