14/05/2013, 11h15, Amphi Marion
Durée : 2 heures
Documents autorisés

Logique et Calculabilité
Licence 3 Informatique (et Maths)

Attention : donnez autant de détails que vous jugez nécessaire ; des simples copies-collers-miroirs de vos notes de cours ne seront pas jugés satisfaisants. En bref, montrez que vous avez compris.

Choisissez 4 exercices parmi les 6 exercices proposés. Abordez un 5ème exercice seulement s'il vous reste du temps.

Calcul propositionnel

Exercice 1. Pour chaque formule ϕ_i, $i = 1, 2, 3$, énumérez ses modèles :

1. $\phi_1 := (P \lor (Q \Rightarrow P)) \land Q \land (P \Rightarrow \neg Q)$;
2. $\phi_2 := (P \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)) \lor Q$;
3. $\phi_3 := (P \land \neg Q) \lor ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow P)$.

Exercice 2. Pour chaque formule ϕ_i, $i = 1, 2, 3$, de l'Exercice 1, proposez une formule ψ_i en forme normale conjonctive équivalente à ϕ_i. Pour la formule ϕ_3, détaillez aussi les étapes de l'algorithme de mise en forme clausale.

Calcul des prédicats

Exercice 3. On considère le langage $\mathcal{S} = (\emptyset, \mathcal{S}_R)$ où

$$\mathcal{S}_R = \{ (Mange, 2), (Herbivore, 1), (Vegetal, 1), (Bambou, 1), (Panda, 1) \}.$$

En utilisant ce langage, exprimez les énoncés suivants en logique du premier ordre.

1. Les herbivore ne mangent que des végétaux.
2. Aucun herbivore ne mange tout type de végétal
3. Il y a des végétaux que ne mange aucun herbivore
4. Les pandas sont des herbivores qui ne consomment que des bambous

Exercice 4. Considérez le langage $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_F, \mathcal{S}_R)$ donné par

$$\mathcal{S}_F = \{ (f, 2) \} \qquad \mathcal{S}_R = \{ (P, 1), (R, 2) \},$$

et la $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ suivante :

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{M}} &= \{ 0, 1, 2, 3 \}, \\ f^{\mathcal{M}}(x, y) &= x + y \mod 4, \\ P^{\mathcal{M}} &= \{ 0, 2 \}, \quad R^{\mathcal{M}} = \{ (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0) \}. \end{aligned}$$

Pour chaque formule ϕ_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$,

1. $\phi_1 := \forall x \exists y P(f(x, y))$;
2. $\phi_2 := \exists y \forall x P(f(x, y))$;
3. $\phi_3 := \forall x (P(x) \lor \exists y (R(x, y) \land P(y)))$;
4. $\phi_4 := \forall x \exists y (R(x, y) \land P(f(x, y)))$;
5. $\phi_5 := \exists y \forall x (R(x, f(x, y)) \land (P(x) \lor P(f(x, y))))$;

évaluez (dites si est vraie ou non) ϕ_i par rapport à la structure $\mathcal{M}$. Pour la formule ϕ_1 justifiez aussi votre réponse : détaillez *toutes* les étapes nécessaires à évaluer cette formule.

Exercice 5. Considérez la formule suivante :

$$\phi_1 := \exists x(\, P(x) \wedge \forall y((\forall x R(x,y)) \Rightarrow R(y,x))\,)\,.$$

1. Transformez la formule ϕ_1 en une formule ϕ_2 équivalente en forme prenexe.
2. Skolemisez ϕ_2 : transformez la formule ϕ_2 en une formule equisatisfiable ϕ_3, avec ϕ_3 universelle (avec des quantificateurs $\forall$ seulement) et en forme prenexe.
3. Mettez la matrice de ϕ_3 en forme normale conjonctive.
4. Déduisez un ensemble de clauses universelles equisatisfiable avec ϕ_1.

Exercice 6. Utilisez le calcul de la résolution pour montrer que la formule $\phi := \forall x P(x)$ est conséquence logique de l'ensemble des formules $\Gamma = \{\, \forall y Q(y), \forall z(\, Q(z) \Rightarrow P(z)\,)\,\}$.
Pour ce faire :

1. transformez $\Gamma \cup \{\, \neg\phi \,\}$ en un ensemble equisatisfiable Δ de clauses universelles ;
2. déduisez, en utilisez les règles de factorisation et/ou résolution, la clause vide de Δ.

28/06/2013, 8h30, Amphi Marion
Durée : 2 heures
Documents autorisés

Logique et Calculabilité
Licence 3 Informatique (et Maths) — site de Saint-Charles

Attention : donnez autant de détails que vous jugez nécessaire ; des simples copies-collers-miroirs de vos notes de cours ne seront pas jugés satisfaisants. En bref, montrez que vous avez compris.

Cet examen comporte une large choix d'exercices ; vous devez résoudre 5 exercices de façon correcte pour obtenir la note maximum.

Calcul propositionnel

Exercice 1. Considérez les formules suivantes :

1. $\phi_1 := p \wedge \neg q$;
2. $\phi_2 := (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$;
3. $\phi_3 := (p \vee q \wedge \neg r) \wedge (\neg p \vee r)$;
4. $\phi_4 := (\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg s \vee p) \wedge p$.

Repondez aux questions suivantes :

Question 1.1 Lesquelles parmi ces formules sont en forme normale conjonctive ? Justifiez votre réponse.

Question 1.2 Si ϕ_i n'est pas en forme normale conjonctive, appliquez l'algorithme pour transformer cette formule dans une formule équivalente en forme normale conjonctive ; détaillez toutes les étapes de l'algorithme.

Question 1.3 Pour $i = 1, 2, 3, 4$, appliquez l'algorithme de DPLL (Davis–Putnam–Logemann–Loveland) pour trouver un modèle de la formule, ou bien pour montrer que cette formule est contradictoire.

Calcul des prédicats

Exercice 2. On se propose de traduire de la langue francaise en logique du premier ordre les phrases suivantes :

1. Marcus était un pompéen.
2. Tous les pompéens étaient des romains.
3. César était souverain.
4. Tous les romains étaient fidèles à César ou le haissaient.
5. Chacun est fidèle à quelqu'un.
6. Les personnes n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles.
7. Marcus a essayé d'assassiner César.

Question 2.1 Proposez un langage du premier ordre pour modeliser ces phrases.

Question 2.2 Pour chaque phrase en francais, proposez une formule en logique du premier ordre correpondante.

Exercice 3. Considérez la formule suivante :

$$\exists x \forall y(\, R(x,y) \Rightarrow P(x, s(y))\,)$$

Question 3.1 Quel est le langage de cette formule ?

Question 3.2 Construisez un modèle $\mathcal{M}$ de cette formule.

Question 3.3 Construisez une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{N}$ telle $D_{\mathcal{N}} \neq \emptyset$ et $\mathcal{N} \not\models \phi$.
Attention : quand vous proposez une $\mathcal{S}$-structure, prenez garde à soigneusement définir son domaine et, pour tout symbole du langage $\mathcal{S}$, son interprétation.

Exercice 4. Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_F)$, où $\mathcal{S}_R = \{\, (R,2), (S,1)\,\}$ et $\mathcal{S}_F = \{\, (f,1)\,\}$, le langage de la formule

$$\phi := \forall x(\, (\exists y R(x, f(y))) \vee (\forall y(R(x,y) \Rightarrow S(y)))\,)\,.$$

Considérez les $\mathcal{S}$-structures suivantes :

1. $D_{\mathcal{M}_1} := \{\, a, b\,\}$, $R^{\mathcal{M}_1} := \emptyset$, $S^{\mathcal{M}_1} := \{\, a\,\}$, $f^{\mathcal{M}_1}(a) := a$ et $f^{\mathcal{M}_1}(b) := b$.
2. $D_{\mathcal{M}_2} := \{\, a, b\,\}$, $R^{\mathcal{M}_2} := \{\, (a,b)\,\}$, $S^{\mathcal{M}_2} := \{\, a\,\}$, $f^{\mathcal{M}_2}(a) := a$ et $f^{\mathcal{M}_2}(b) := a$;
3. $D_{\mathcal{M}_3} := \mathcal{N}$ (les nombres entiers non-négatifs), $R^{\mathcal{M}_3} := \{\, (x, x+1) \mid x \in \mathcal{N}\,\}$, $S^{\mathcal{M}_3} := \emptyset$, $f^{\mathcal{M}_3}(x) := x+1$;
4. $D_{\mathcal{M}_4} := \mathcal{N}$, $R^{\mathcal{M}_4} := \{\, (x, x+1) \mid x \in \mathcal{N}\,\}$, $S^{\mathcal{M}_4} := \{\, 1\,\}$, $f^{\mathcal{M}_4}(x) := x+2$;
5. $D_{\mathcal{M}_5} := \mathcal{N}$, $R^{\mathcal{M}_5} := \{\, (x+1, x) \mid x \in \mathcal{N}\,\}$, $S^{\mathcal{M}_5} := \{\, 1\,\}$, $f^{\mathcal{M}_5}(x) := x+1$.

Pour chaque $i = 1, \ldots, 5$, dites si la relation $\mathcal{M}_i \models \phi$ est vraie ou non. Justifiez votre réponse.

Exercice 5. Considérez la formule suivante (la même que celle de l'exercice précédent) :

$$\phi := \forall x(\, (\exists y R(x, f(y))) \vee (\forall y(R(x,y) \Rightarrow S(y)))\,).$$

Question 5.1 Transformez la formule ϕ en une formule ϕ_2 équivalente en forme prenexe.

Question 5.2 Skolemisez ϕ_2 : transformez la formule ϕ_2 en une formule equisatisfiable ϕ_3, avec ϕ_3 universelle (avec des quantificateurs $\forall$ seulement) et en forme prenexe.

Question 5.3 Mettez la matrice de ϕ_3 en forme normale conjonctive.

Question 5.4 Déduisez un ensemble de clauses universelles equisatisfiable avec ϕ.

Exercice 6. Considérez les problèmes d'unification suivants (la signature étant $\{\, (c,0), (f,1), (g,2)\,\}$) :

1. $(\, g(x, g(f(c), g(y,x)))\,,\, g(f(c), g(f(c), z))\,)$;
2. $(\, g(x,c)\,,\, g(f(y), c)\,)\,,\, (\, z\,,\, g(c,x)\,)\,,\, (\, y\,,\, z\,)$.

Pour chacun de ces problèmes, exécutez l'algorithme `UNIFIER` pour trouver un unificateur principal du problème ou bien montrer qu'un tel unificateur n'existe pas. Détaillez toutes les étapes de l'algorithme.

Exercice 7. Utilisez le calcul de la résolution pour montrer que la formule $\phi := \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$ est conséquence logique de l'ensemble des formules $\Gamma = \{\, \forall y(P(y) \Rightarrow Q(y)), \forall z(\, Q(z) \Rightarrow R(z)\,)\,\}$.
Pour ce faire :

1. transformez $\Gamma \cup \{\, \neg\phi\,\}$ en un ensemble equisatisfiable Δ de clauses universelles ;
2. déduisez, en utilisez les règles de factorisation et/ou résolution, la clause vide de Δ.

Date : 14/05/2014, 8h30, Amphi Peres
Durée : 2 heures
Documents authorisés

Cours Logique et Calculabilité
Licence 3 Informatique (et Maths), Aix-Marseille Université

Examen

Attention : donnez autant de détails que vous jugez nécessaire ; des simples copies-collers-miroirs de vos notes de cours ne seront pas jugés satisfaisants. En bref, montrez que vous avez compris.

Cet examen comporte un choix d'exercices varié ; vous devez ***résoudre 5 exercices*** *de façon correcte pour obtenir la note maximum.*

Calcul propositionnel

Exercice 1. Considérez la formule

$$\varphi := s \wedge (r \Rightarrow (\neg s \wedge (p \vee q))) \wedge \neg((\neg r \wedge \neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg t)) \wedge ((q \wedge t) \Rightarrow p)\,.$$

Question 1.1. Calculez un ensemble de clauses Γ tel que $\mathsf{mod}(\Gamma) = \mathsf{mod}(\varphi)$. (Fin question 1.1)

Question 1.2. Utilisez l'algorithme de Davis-Putnam-Logemann-Loveland pour calculer un modèle de φ, ou bien pour montrer que φ est insatisfaisable. (Fin question 1.2)

Calcul des prédicats

Exercice 2. On considère le langage $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{\mathtt{f}}, \mathcal{S}_{\mathtt{r}})$ où $\mathcal{S}_{\mathtt{f}} := \varnothing$ et

$$\mathcal{S}_{\mathtt{r}} := \{\, (\mathtt{Chat}, 1), (\mathtt{Chien}, 1), (\mathtt{Aime}, 2), (\mathtt{Hait}, 2), (\mathtt{Maître}, 2), (\mathtt{Propriétaire}, 2) \,\}\,.$$

En utilisant ce langage, exprimez les énoncés suivants en logique du premier ordre.

1. Les chiens aiment leurs maîtres.
2. Des chats haïssent leurs propriétaires.
3. Les chats sont les maîtres de leurs propriétaires.
4. Les chiens ne haïssent que les chats qui ne les aiment pas.

Exercice 3. Considérez le langage $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{\mathtt{f}}, \mathcal{S}_{\mathtt{r}})$ donné par

$$\mathcal{S}_{\mathtt{f}} := \{\, (f, 1), (o, 0) \,\} \qquad \mathcal{S}_{\mathtt{r}} := \{\, (R, 2) \,\}\,,$$

et la $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ suivante :

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{M}} &:= \{\, 0, 1, 2, 3 \,\}\,, \\ f^{\mathcal{M}}(x) &:= (x-1) \mod 4\,, \quad o^{\mathcal{M}} := 0\,, \\ R^{\mathcal{M}} &:= \{\, (0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3) \,\}\,. \end{aligned}$$

Question 3.1. Représentez cette structure comme un graphe étiqueté. (Fin question 3.1)

Question 3.2. Pour chaque formule φ_i, $i = 1, \ldots, 6$,

$\varphi_1 := \quad \forall x(\, R(x, f(o)) \vee R(o, x) \,)\,;$

$\varphi_2 := \quad \forall x \exists y(\, R(x, y) \vee R(y, x) \,)\,;$

$$\begin{aligned}
\varphi_3 &:= \forall x R(f(x), x)\,; \\
\varphi_4 &:= \forall x(\, R(x, f(o)) \Rightarrow \exists y R(x, y)\,)\,; \\
\varphi_5 &:= \exists x(\, R(o, x) \land \forall y(\, R(o, y) \Rightarrow R(x, y)\,)\,)\,; \\
\varphi_6 &:= \forall x(\, R(o, x) \Rightarrow \exists y(\, R(o, y) \land \neg R(x, y)\,)\,)\,;
\end{aligned}$$

dites si $\mathcal{M} \models \varphi_i$ ou non. Justifiez brièvement votre réponse. (Fin question 3.2)

Question 3.3. Pour la formule φ_3 ci-dessus, détaillez *toutes* les étapes nécessaires à l'évaluer. (Fin question 3.3)

Exercice 4. Considérez la formule suivante :

$$\varphi_1 := \forall x(\, Q(x) \land \exists y((\forall x Q(x)) \Rightarrow R(y, x))\,)\,.$$

1. Transformez la formule φ_1 en une formule φ_2 équivalente en forme prenexe.
2. Skolemisez φ_2 : transformez la formule φ_2 en une formule equisatisfiable φ_3, avec φ_3 universelle (avec des quantificateurs $\forall$ seulement) et en forme prenexe.
3. Mettez la matrice de φ_3 en forme normale conjonctive.
4. Déduisez un ensemble de clauses universelles equisatisfiable avec φ_1.

Exercice 5. Considérez l'ensemble Γ de clauses donné par

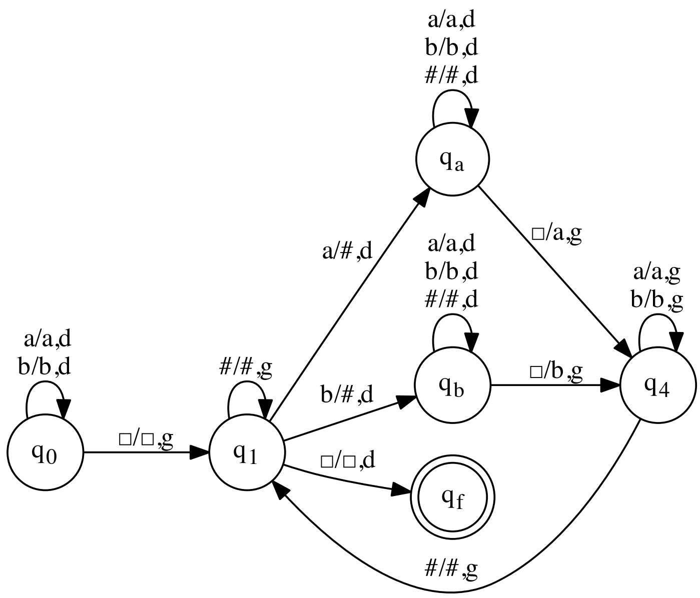
$$\Gamma := \{\, R(x, f(g(y)))\,, \neg R(z, f(w)) \lor \neg R(g(u), y)\,\}\,.$$

Question 5.1. Listez toutes les inférences du calcul de la résolution que vous pouvez faire à partir de l'ensemble Γ. Pour chaque inférence, détaillez la règle (factorisation ou résolution) utilisée, la substitution utilisée et les deux littéraux unifiés par cette substitution. (Fin question 5.1)

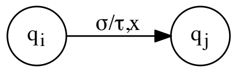
Question 5.2. Utilisez le calcul de la résolution pour montrer que cet ensemble est incohérent. (Fin question 5.2)

Calculabilité

Exercice 6. Considérez la machine de Turing dans la figure suivante :



(Rappel : une transition de la forme



se lit de la façon suivante : *si la machine est dans l'état q_i et la tête de lecture lit le symbole σ, alors on remplace ce symbole par τ, on déplace la tête de lecture à la gauche si $x = g$, à la droite si $x = d$, et on se rend dans l'état q_j.*)

Question 6.1. Exécutez la machine sur l'entrée ab.[1] (Fin question 6.1)

Question 6.2. Soit w un mot sur l'alphabet $\{\, a, b\,\}$; que calcule cette machine sur entrée w ? Justifiez votre réponse. (Fin question 6.2)

1. On dénotera une configuration de la machine comme un couple (q, w) où q est un état de la machine, et w est un mot avec une lettre soulignée selon la position de la tête de lecture. Par exemple, la configuration initiale sur l'entrée ab est $(q_0, \underline{a}b)$.

Date : 27/06/2014, de 8h30 à 10h30, Amphi Marion — Cours Logique et Calculabilité
Durée : 2 heures — Licence 3 Informatique (et Maths), Aix-Marseille Université
Documents authorisés

Examen

Attention : donnez autant de détails que vous jugez nécessaire ; des simples copies-collers-miroirs de vos notes de cours ne seront pas jugés satisfaisants. En bref, montrez que vous avez compris.

Cet examen comporte un choix d'exercices varié ; vous devez ***résoudre 5 exercices*** *de façon correcte pour obtenir la note maximum.*

Calcul propositionnel

Exercice 1. En utilisant la méthode de la coupure, vérifiez la validité des conséquences logiques suivantes :

1. $\{ p \Rightarrow \neg q \vee r,\ q \Rightarrow p \wedge \neg r \} \models r \Rightarrow q$;
2. $\{ \neg p \Rightarrow q,\ r \Rightarrow \neg p \} \models \neg p \Rightarrow \neg r \Rightarrow q$;
3. $\{ p \Rightarrow r \wedge t,\ t \vee s \Rightarrow \neg q \} \models \neg(p \wedge q)$;
4. $\{ s \Rightarrow r \wedge p,\ q \} \models \neg r \wedge \neg s \wedge p$.

Calcul des prédicats

Exercice 2. Après avoir clairement défini le langage utilisé, exprimez les énoncés suivants en logique du premier ordre.

1. Les enfants de deux parents aux yeux bleus ont forcément les yeux bleus.
2. Lorsqu'un enfant a les yeux bleus, on ne peut pas affirmer que ses deux parents ont les yeux bleus.
3. Un enfant de deux parents aux yeux bruns peut avoir les yeux bleus ou bruns.
4. Lorsqu'une personne a les yeux bruns, au moins un de ses deux parents a les yeux bruns.

Exercice 3. Considérez le langage $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{\mathtt{f}}, \mathcal{S}_{\mathtt{r}})$ donné par $\mathcal{S}_{\mathtt{f}} := \{ (f,1), (o,0) \}$ et $\mathcal{S}_{\mathtt{r}} := \{ (R,2) \}$, et la $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ telle que $D_{\mathcal{M}} := \{ 0,1,2,3,4 \}$ et où l'interprétation des symboles est :

$$o^{\mathcal{M}} := 0\,, \quad f^{\mathcal{M}}(0) := 0\,, \quad f^{\mathcal{M}}(1) := 2\,, \quad f^{\mathcal{M}}(2) := 3\,, \quad f^{\mathcal{M}}(3) := 4\,, \quad f^{\mathcal{M}}(4) := 1\,,$$
$$R^{\mathcal{M}} := \{ (0,1), (2,0), (0,3), (4,0) \}\,.$$

Question 3.1. Représentez cette structure comme un graphe étiqueté. (Fin question 3.1)

Question 3.2. Pour $i = 1, \ldots, 5$, dites si $\mathcal{M} \models \varphi_i$ ou non (justifiez brièvement votre réponse) :

$\varphi_1 := \quad \forall x(R(f(x), o) \vee R(o, f(x)))$;
$\varphi_2 := \quad \exists x \exists y(\neg R(f(x), y) \wedge \neg R(y, f(x)))$;
$\varphi_3 := \quad \exists x \forall y(x = y \vee R(x,y) \vee R(y,x))$;
$\varphi_4 := \quad \forall x \forall y(R(x,y) \Rightarrow \exists z R(x,z))$;
$\varphi_5 := \quad \exists x(R(x,o) \wedge \neg R(f(f(x)), o))$.

(Fin question 3.2)

Question 3.3. Pour la formule φ_5 ci-dessus, détaillez *toutes* les étapes nécessaires à l'évaluer. (Fin question 3.3)

Exercice 4. Considérez la formule suivante :

$$\varphi := \forall x \exists y(R(x,y) \ \wedge\ \forall z(R(x,z) \Rightarrow z = y))\,.$$

Question 4.1. Mettez φ en forme prenexe, puis « Skolemisez » cette formule. (Fin question 4.1)

Voici un modèle $\mathcal{M}$ de φ, trouvé par l'outil `Mace4`, tel que $D_{\mathcal{M}} = \{0, 1\}$:

```
interpretation( 2, [number=1, seconds=0], [
        function(f1(_), [ 0, 0 ]),
        relation(R(_,_), [
                          1, 0,
                          1, 0 ])
]).
```

Question 4.2. Représentez ce modèle sous la forme de graphe étiqueté. (Fin question 4.2)

Question 4.3. Expliquez pourquoi, dans le modèle trouvé par `Mace4`, on y trouve l'interprétation du symbole de fonction `f1` (qui n'apparaît pas dans la formule φ). (Fin question 4.3)

Question 4.4. Combien de modèles $\mathcal{M}$ de φ existent tels que $D_{\mathcal{M}} = \{0, 1\}$? Justifiez votre réponse. (Fin question 4.4)

Exercice 5. Considérez les couples de termes (cas 1 et 2) et de formules atomiques (cas 3 et 4) ci-dessous :

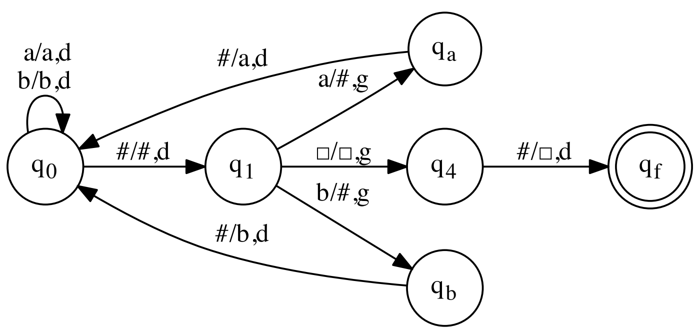
1. $f(x, g(x, y))$ et $f(g(y, z), g(g(h(u), y), h(u)))$;
2. $r(x, h(k(y)), h(x))$ et $r(f(t, z), h(z), h(f(y, z)))$;
3. $P(x, h(x), g(h(x), x))$ et $P(z, h(h(a)), g(h(g(a, z)), v))$;
4. $P(u, k(f(a, b)), u)$ et $P(f(x, k(z)), x, f(y, k(b)))$.

Question 5.1. Décrivez le langage sur lequel ces termes/formules sont construits. (Les lettres a et b sont ici des constantes, les lettres x, y, u, v, z, t sont des variables). (Fin question 5.1)

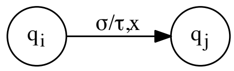
Question 5.2. Pour chaque cas, dites si les deux termes (ou les deux formules atomiques) sont unifiables ou non. Justifiez votre réponse : en particulier, si la réponse est oui, donnez un unificateur principal (un MGU). (Fin question 5.2)

Calculabilité

Exercice 6. Considérez la machine de Turing ci-dessous :



(Rappel : une transition de la forme



se lit de la façon suivante : *si la machine est dans l'état q_i et la tête de lecture lit le symbole σ, alors on remplace ce symbole par τ, on déplace la tête de lecture à la gauche si $x = g$, à la droite si $x = d$, et on se rend dans l'état q_j.)*

Question 6.1. Exécutez la machine sur l'entrée $ab\sharp bab$.[1] (Fin question 6.1)

Question 6.2. Soient w_1 et w_2 deux mots sur l'alphabet $\{a, b\}$; que calcule cette machine sur entrée $w_1 \sharp w_2$? Justifiez votre réponse. (Fin question 6.2)

1. On dénotera une configuration de la machine comme un couple (q, w) où q est un état de la machine, et w est un mot avec une lettre soulignée selon la position de la tête de lecture. Par exemple, la configuration initiale sur l'entrée $ab\sharp bab$ est $(q_0, \underline{a}b\sharp bab)$.

Année universitaire 2014/2015

Site : ☐ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1^{er} semestre ☒ $2^{ème}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L3 Nom du diplôme : Licence d'Informatique
Code du module : SIN6U2 Libellé du module : Logique et Calculabilité
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : OUI, notes de Cours/TD/TP

Calcul propositionnel

Exercice 1. Pour chacun des cas suivants, dire si $\Gamma \models \varphi$, c'est-à-dire si la formule φ est une conséquence logique de l'ensemble de formules Γ. Si c'est le cas, utilisez la méthode de la coupure pour le démontrer ; sinon, determinez une valuation v telle que $v \in \mathsf{mod}(\Gamma)$ et $v(\varphi) = 0$ en utilisant l'algorithme DPLL (motivez brièvement le choix des littéraux).

1. $\Gamma := \{ \neg(p \vee q) \}$, $\varphi := \neg p \vee \neg q$;
2. $\Gamma := \{ \neg p \vee \neg q \}$, $\varphi := \neg(p \vee q)$;
3. $\Gamma := \{ p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \}$, $\varphi := (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$;
4. $\Gamma := \{ p \vee q \vee r,\ p \Rightarrow (q \vee r),\ q \Rightarrow p \}$, $\varphi := r \wedge p$.

Calcul des prédicats

Exercice 2. Considérez les phrases—en langue française—suivantes :

1. Le chat est un animal qui aime la nuit.
2. Certains animaux aiment le jour.
3. Un animal nocturne ne chasse que les animaux diurnes.
4. Les souris sont des animaux diurnes.

Question 2.1. Choisissez un langage du premier ordre vous permettant de formaliser ces phrases en logique du premier ordre. (Fin question 2.1)

Question 2.2. Formalisez ces quatre phrases comme des formules de la logique du premier ordre sur le langage choisi. (Fin question 2.2)

Exercice 3. Dans cet exercice on se propose de montrer que la formule

$$\varphi_1 := [\,\exists x \forall y (P(x) \vee Q(y))\,] \Rightarrow [\,\forall y \exists x (P(x) \vee Q(y))\,]$$

est une tautologie. Procédez comme suit :

1. Calculez une forme prenexe φ_2 de $\neg\varphi_1$.
2. Calculez une forme Skolemisée φ_3 de φ_2 et un ensemble Γ de clauses universelles équivalent à la formule φ_3.
3. Utilisez le calcul de la résolution pour dériver la clause vide depuis Γ.

Exercice 4. L'outil `Mace4` a calculé ces trois modèles :

```
============================== MODEL =================================
interpretation( 3, [number=1, seconds=0], [
        function(c1, [ 0 ]),
        relation(R(_,_), [
                           0, 0, 0,
                           1, 0, 0,
                           1, 0, 0 ])
]).
============================== end of model ==========================
============================== MODEL =================================
interpretation( 3, [number=2, seconds=0], [
        function(c1, [ 1 ]),
        relation(R(_,_), [
                           0, 1, 0,
                           0, 0, 0,
                           0, 1, 0 ])
]).
============================== end of model ==========================
============================== MODEL =================================
interpretation( 3, [number=3, seconds=0], [
        function(c1, [ 2 ]),
        relation(R(_,_), [
                           0, 0, 1,
                           0, 0, 1,
                           0, 0, 0 ])
]).
============================== end of model ==========================
```

Question 4.1. Quel est le langage $\mathcal{S}$ du premier ordre utilisé ? (Fin question 4.1)

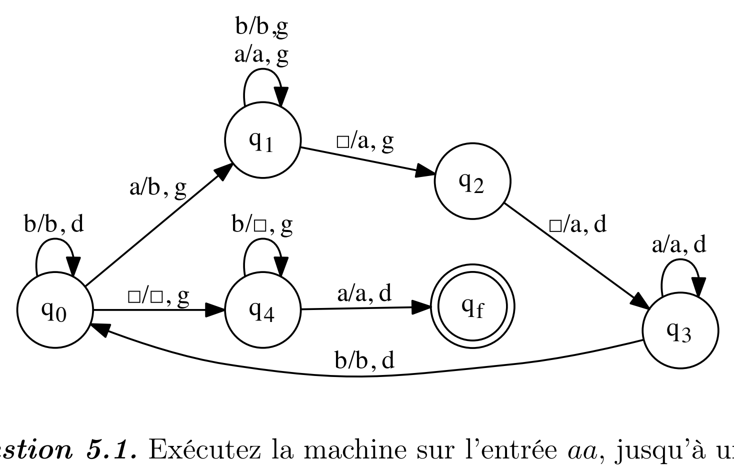
Question 4.2. Représentez (dessinez) ces trois $\mathcal{S}$-structures comme des graphes orientés étiquetés. (Fin question 4.2)

Question 4.3. Soit $\mathcal{M}$ la première $\mathcal{S}$-structure calculée par `Mace4`. Argumentez, en suivant étape par étape la définition d'évaluation des formules du premier ordre, que $\mathcal{M} \models \exists y \forall x (R(x, y) \vee x = y)$. (Fin question 4.3)

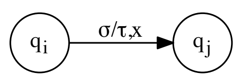
Question 4.4. Proposez un ensemble Γ de formules du premier ordre tel que les $\mathcal{S}$-structures $\mathcal{M}$ avec $D_{\mathcal{M}} = \{ 0, 1, 2 \}$ qui sont modèles de Γ (i.e. $\mathcal{M} \models \varphi$, pour tout $\varphi \in \Gamma$) soient exactement les structures calculées par `Mace4`, listées ci-dessus. (Fin question 4.4)

Calculabilité

Exercice 5. Considérez la machine de Turing ci-dessous :



(Rappels : une transition de la forme



se lit de la façon suivante : *si la machine est dans l'état q_i et la tête de lecture lit le symbole σ, alors on remplace ce symbole par τ, on déplace la tête de lecture à la gauche si $x = g$, à la droite si $x = d$, et on se rend dans l'état q_j*. Le symbole $\Box$ dénote la symbole blanc de l'alphabet de ruban.)

Question 5.1. Exécutez la machine sur l'entrée aa, jusqu'à une configuration finale. (Fin question 5.1)

Question 5.2. Soit w un mot sur l'alphabet $\{ a \}$; que calcule cette machine sur entrée w ? Justifiez votre réponse. (Fin question 5.2)

Année universitaire 2014/2015

Site : ☐ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☒ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L3 Nom du diplôme : Licence d'Informatique
Code du module : SIN6U2 Libellé du module : Logique et Calculabilité
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : OUI, notes de Cours/TD/TP

---

*Cet examen comporte un choix d'exercices varié ; vous devez **résoudre environ 5 exercices** de façon correcte pour obtenir la note maximum.*

Calcul propositionnel

Exercice 1. Considérez l'ensemble Γ de formules propositionnelles défini ci-dessous :

$$\Gamma := \{ \neg((p \Rightarrow \neg r) \Rightarrow q) \, , \, r \Rightarrow p \, , \, \neg r \Rightarrow q \}$$

Question 1.1. Utilisez l'algorithme DPLL pour chercher un modèle de Γ. (Fin question 1.1)

Question 1.2. Utilisez la methode de la coupure pour montrer que $\mathsf{mod}(\Gamma) = \varnothing$. (Fin question 1.2)

Exercice 2. On se propose, dans cet exercice, de montrer que l'ensemble Γ de clauses défini par :

$$\Gamma := \{ p \vee q \, , \, p \vee \neg q \} \, ,$$

est cohérent, en utilisant la méthode de la coupure. On procédera comme suit :

1. Calculez un ensemble Γ' de clauses tel que (a) $\Gamma \subseteq \Gamma'$, (b) $\mathsf{mod}(\Gamma) = \mathsf{mod}(\Gamma')$, (c) Γ' est *saturé*.
2. Argumentez que Γ est cohérent, en utilisant la forme particulière de Γ'.

Calcul des prédicats

Exercice 3. Considérez les phrases—en langue française—suivantes :

1. Au moins deux personnes ont préparé et réussi l'examen.
2. Tout le monde a reçu des conseils d'Alice ou de Bob.
3. Tous ceux qui ont préparé l'examen et ont reçu des conseils de Bob ont raté l'examen.
4. Alice a reçu des conseils de quelqu'un ayant reçu des conseils de Bob, et elle a raté l'examen.

Question 3.1. Choisissez un langage du premier ordre vous permettant de formaliser ces phrases en logique du premier ordre. (Fin question 3.1)

Question 3.2. Formalisez ces quatre phrases comme des formules de la logique du premier ordre sur le langage choisi. (Fin question 3.2)

Exercice 4. Dans cet exercice on se propose de montrer que la formule

$$\varphi_1 := \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \exists y R(x,y))$$

est une tautologie. Procédez comme suit :

1. Calculez une forme prenexe φ_2 de $\neg\varphi_1$.
2. Calculez une forme Skolemisée φ_3 de φ_2 et un ensemble Γ de clauses universelles équivalent à la formule φ_3.
3. Utilisez le calcul de la résolution pour dériver la clause vide depuis Γ.

Exercice 5. L'outil `Mace4` a calculé la structure $\mathcal{M}$ ci-dessous :

```
============================== MODEL =================================
interpretation( 5, [number=1, seconds=0], [
        function(o, [ 0 ]),
        function(f(_), [ 0, 2, 3, 4, 1 ]),
        relation(R(_,_), [
                           0, 1, 0, 1, 0,
                           0, 0, 0, 0, 0,
                           1, 0, 0, 0, 0,
                           0, 0, 0, 0, 0,
                           1, 0, 0, 0, 0 ])
]).
============================== end of model ==========================
```

Question 5.1. Quel est le langage $\mathcal{S}$ du premier ordre utilisé ? (Fin question 5.1)

Question 5.2. Représentez (dessinez) la $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ comme un graphe orienté et étiqueté. (Fin question 5.2)

Question 5.3. Pour $i = 1, \ldots, 5$, dites si $\mathcal{M} \models \varphi_i$ ou non (justifiez brièvement votre réponse) :

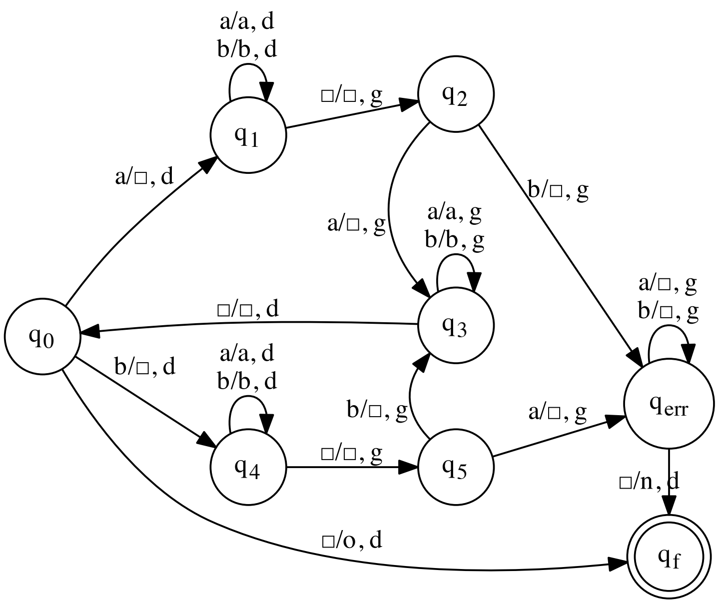
$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x(\, R(f(x), o) \vee R(o, f(x))\,)\,;\\
\varphi_2 &:= \exists x \exists y(\, \neg R(f(x), y) \wedge \neg R(y, f(x))\,)\,;\\
\varphi_3 &:= \exists x \forall y(\, x = y \vee R(x, y) \vee R(y, x)\,)\,;\\
\varphi_4 &:= \forall x \forall y(\, R(x, y) \Rightarrow \exists z R(x, z)\,)\,;\\
\varphi_5 &:= \exists x(\, R(x, o) \wedge \neg R(f(x), o)\,).
\end{aligned}$$

(Fin question 5.3)

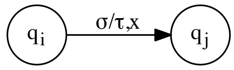
Question 5.4. Pour la formule φ_5 ci-dessus, détaillez *toutes* les étapes nécessaires à l'évaluer. (Fin question 5.4)

Calculabilité

Exercice 6. Considérez la machine de Turing ci-dessous :



(Rappels : une transition de la forme



se lit de la façon suivante : *si la machine est dans l'état q_i et la tête de lecture lit le symbole σ, alors on remplace ce symbole par τ, on déplace la tête de lecture à la gauche si $x = g$, à la droite si $x = d$, et on se rend dans l'état q_j.* Le symbole $\square$ dénote la symbole blanc de l'alphabet de ruban.)

Question 6.1. Exécutez la machine sur l'entrée *abba*, jusqu'à une configuration finale. (Fin question 6.1)

Question 6.2. Soit w un mot sur l'alphabet $\{\, a, b \,\}$; que calcule cette machine sur entrée w ? Justifiez votre réponse. (Fin question 6.2)