TD n° 5

Coupure, modélisation, syntaxe du premier-ordre

PREMIER ORDRE, SYNTAXE

Exercice 5.1. Considérez le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ où

$$\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{ (c,0),(f,1),(g,2) \}, \qquad \mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{ (P,1),(Q,2),(R,3) \}$$

et les expressions suivantes :

1. $g(f(c), g(x, f(f(y))))$,
2. $g(f(c), f(c, f(c)))$,
3. $Q(f(x), P(y))$,
4. $R(f(c), f(f(c)), y)$,
5. $P(f(x)) \wedge \exists y (Q(y,x) \Rightarrow R(y,x,f(x)))$,
6. $P(f(x)) \vee R(g(x,y), f(z), y)$,
7. $\forall x \exists y\, g(x, f(y))$,
8. $\exists y \forall x\, Q(g(x), f(y, g(c)))$,
9. $\forall x \exists y \forall z\, Q(x, f(y), g(c,z)) \vee P(x)$.

Classez chaque expression dans une ou plusieurs des catégories suivantes : (a) terme appartenant à $\mathtt{T}_{\mathscr{S}_{\mathtt{f}}}[X]$, (b) formule atomique parmi les formules de $\mathscr{F}_{\mathrm{po}}(\mathscr{S})$, (c) formule appartenant à $\mathscr{F}_{\mathrm{po}}(\mathscr{S})$, (d) aucun des précédents. Dans le dernier cas, expliquez pourquoi l'expression ne peut pas se classer.

Exercice 5.2. Pour chacune des signatures $\mathscr{S}_{\mathtt{f}}$ suivantes, donnez plusieurs éléments de l'ensemble $\mathtt{T}_{\mathscr{S}_{\mathtt{f}}}[X]$ des termes définis sur $\mathscr{S}_{\mathtt{f}}$.

1. $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(s,1)\}$;
2. $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f,2)\}$;
3. $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(f,2),(s,1),(c,0)\}$.

Exercice 5.3. On considère le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ où $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(c,0),(f,1),(g,2)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(r,2),(p,1),(q,3)\}$

1. Donnez trois termes de ce langage et utilisez les pour construire trois formules atomiques.
2. Donnez quelques formules du premier ordre de ce langage.

Exercice 5.4. On considère l'ensemble de variables $X = \{x,y,z\}$ et les formules suivantes :

$$\varphi_1 = (\forall x \exists z f(x,z)) \Rightarrow (\exists x \forall y r(x,y,z))$$
$$\varphi_2 = (\forall x p(x) \wedge \forall x f(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge f(x))$$
$$\varphi_3 = \forall x ((\exists x\, g(f(x),a) \vee h(x,x)) \wedge (\forall y \exists x q(x,y) \vee \exists z p(z,y)))$$

Pour chacune des formules $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

1. inférez le langage (i.e. le couple des signatures $\mathscr{S}_{\mathtt{f}}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}}$) sur laquelle la formule est écrite ;
2. listez les termes et les formules atomiques apparaissant dans la formule.

Exercice 5.5. Pour chacune des formules suivantes, déterminer les occurrences liées et libres de chaque variable, puis renommer les variables pour obtenir une formule équivalente dont aucune occurrence de variable n'est libre et liée à la fois.

$\varphi_1 \equiv \forall x \exists z r(x,z) \Rightarrow \exists x \forall y s(x,y,z)$
$\varphi_2 \equiv \forall x p(x) \wedge \forall x q(x) \Rightarrow \forall x (p(x) \wedge q(x))$
$\varphi_3 \equiv \forall x ((\exists x p(f(x),a) \vee q(x,x)) \wedge (\forall y \exists x q(x,y) \vee \exists z p(z,y)))$

STRUCTURES POUR UN LANGAGE

Exercice 5.6. On considère le langage $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ où $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{(c,0),(f,1)\}$ et $\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{(r,2),(p,1)\}$

1. Donnez deux $\mathscr{S}$-structures distinctes $\mathscr{M}_0$ et $\mathscr{M}_1$ telles que $D^{\mathscr{M}_0} = D^{\mathscr{M}_1} = \{0,1,2,3\}$.
2. Dessinez ces strutures commes des graphes etiquetes :
   (a) pour tout $c \in \mathscr{S}_{\mathtt{f}}$ tel que $\rho(c) = 0$, étiquetez v par le symbole c si $c^{\mathscr{M}} = v$,
   (b) pour tout $P \in \mathscr{S}_{\mathtt{r}}$ tel que $\rho(P) = 1$ étiquetez v par P chaque fois que $v \in P^{\mathscr{M}}$,
   (c) pour tout $f \in \mathscr{S}_{\mathtt{f}}$ tel que $\rho(f) = 1$, mettez une flèche étiquetée par f de v et v' chaque fois que $f^{\mathscr{M}}(v) = v'$,
   (d) pour tout $R \in \mathscr{S}_{\mathtt{r}}$ tel que $\rho(R) = 2$, mettez une flèche étiquetée par R de v à v' chaque fois que $(v,v') \in R^{\mathscr{M}}$.
3. Est ce que ces deux structures sont la même, à renommage de sommets près ?
4. Évaluez, dans ces structures, les termes $f(f(x))$ et $f(f(c))$ par rapport à la valuation $\mathscr{V}$ telle que $\mathscr{V}(x) = 2$.

Exercice 5.7. Considérez le langage pour les piles $\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = (\mathscr{S}_{\mathtt{f}}, \varnothing)$, avec

$$\mathscr{S}_{\mathtt{f}} = \{ (Empty,0),(Pop,1),(Push0,1),(Push1,1) \}$$

Evaluez les termes suivants

$$Push1(Push0(Pop(Empty))), \quad Pop(Push0(Push1(x)))$$

dans les strucuctures $\mathscr{M}_0$ et $\mathscr{M}_1$ telles que $D^{\mathscr{M}_0} = D^{\mathscr{M}_1} = \mathbf{Z}$ et

$$Empty^{\mathscr{M}_0} = 0, \quad Pop^{M_0}(x) = x+1, \quad Push0^{\mathscr{M}_0}(x) = x-1 \quad Push1^{\mathscr{M}_0}(x) = x-2;$$
$$Empty^{\mathscr{M}_1} = 3, \quad Pop^{M_1}(x) = x+1, \quad Push0^{\mathscr{M}_1}(x) = x^2 \qquad Push1^{\mathscr{M}_1}(0) = 10, \ Push1^{\mathscr{M}_1}(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ si } x \neq 0;$$

et par rapport à la valuation $\mathscr{V}$ telle que $\mathscr{V}(x) = 10$.

FRANÇAIS ET LOGIQUE DU PREMIER ORDRE

Exercice 5.8. On considère le langage $\mathscr{S} = (\varnothing, \mathscr{S}_{\mathtt{r}})$ où

$$\mathscr{S}_{\mathtt{r}} = \{ (Mange,2),(Herbivore,1),(Vegetal,1),(Bambou,1),(Panda,1) \}.$$

En utilisant ce langage, exprimez les énoncés suivants en logique du premier ordre.

1. Les herbivore ne mangent que des végétaux.
2. Aucun herbivore ne mange tout type de végétal.
3. Il y a des végétaux que ne mange aucun herbivore.
4. Les pandas sont des herbivores qui ne consomment que des bambous.