TD n° 8

Unification et résolution

UNIFICATION

Exercice 8.1. Appliquez l'algorithme d'unification présenté en cours pour résoudre les problèmes d'unification suivants :

1. $(x + s(y) * s(z), 7 + s(5) * s(s(x)))$;
2. $(x + f(y,5), g(x) + f(g(x),5))$;
3. $(f(z, f(y,c)), f(g(w),x))$;
4. $(f(x),y)$, $(g(y),z)$, $(y, f(w))$;
5. $(g(x), g(f(y)))$, $(z, h(y,x))$, (y,z) ;
6. $(f(x), f(g(y)))$, $(x, h(y))$.

Pour chaque instance du problème :

— on décrira d'abord la signature fonctionnelle : lesquels sont les symboles de fonctions et avec quelle arité ils sont utilisés;

— on éclaircira, étape par étape, le déroulement de l'algorithme.

Exercice 8.2. Argumentez que, si $x \notin Var(t)$, alors la substitution $[t/x]$ est un MGU du problème (x,t). Que peut on dire si $x \in Var(t)$?

RÉSOLUTION

Exercice 8.3. Appliquez la règle de factorisation, de toute facon possible, aux clauses suivantes :

1. $\neg Q(g(y),x) \vee P(f(x),y) \vee P(y, f(x))$;
2. $\neg Q(x,y) \vee P(f(x),y) \vee P(x, g(z)) \vee P(f(w),y)$.

Exercice 8.4. Appliquez la règle de résolution, de toute façon possible, aux couples de clauses suivantes :

1. $\neg P(x) \vee P(f(x)) \vee R(y)$, $\neg P(y) \vee Q(y, g(y))$;
2. $\neg P(x) \vee Q(f(x))$, $\neg Q(y) \vee P(g(y))$.

Exercice 8.5. Montrez que la règle de coupure

$$\frac{C \vee P \qquad C' \vee \neg P}{C \vee C'}$$

est correcte. C'est-à-dire, montrez que, pour tout $\mathscr{S}$-structure $\mathscr{M}$, si $\mathscr{M} \models C \vee P$ et $\mathscr{M} \models C' \vee \neg P$, alors $\mathscr{M} \models C \vee C'$. NB : faites attention aux quantificateurs implicites.

Exercice 8.6. Considérez la formule suivante :

$$\begin{aligned} \Phi := \; & \forall x \neg R(x,x) \\ & \wedge \; \exists x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \neg \exists z R(z,x)) \\ & \wedge \; \forall x,y (R(x,y) \Rightarrow \exists z (R(x,z) \wedge R(z,x))) \,. \end{aligned}$$

1. Donnez, sous forme d'ensemble de clauses, une forme clausale de cette formule.

2. Enumérez toutes les règles du calcul de la résolution que vous pouvez appliquer à l'ensemble de clauses ainsi obtenu.
3. Appliquez ces règles pour engendrer des nouvelles clauses.

Exercice 8.7. Considérez l'ensemble de clauses suivantes :

$$\Gamma = \{ \quad P(c_0), \quad \forall x(\neg P(x) \vee x = c_1), \quad c_1 = c_2 \ \}$$

(a) Utilisez le calcul de la résolution pour montrer que la formule $c_0 = c_2$ n'est pas (contrairement aux attentes) une conséquence logique de Γ.

(b) Pour quelle raison le calcul de la résolution n'est pas capable d'inférer $c_0 = c_2$ depuis Γ ?

(c) Étant donné votre réponse à (b), expliquez comment on peut se servir de la résolution pour montrer que $c_0 = c_2$ est une conséquence logique de Γ.

Exercice 8.8. (Une forme simplifiée des) Les règles de paramodulation et flip sont les suivantes :

$$\frac{C \vee t_1 = t_2 \qquad P(t_3)}{(C \vee P(t_2))\sigma} \qquad\qquad \frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}$$

où σ est un MGU de t_1 et t_3.

— Montrez qu'on peut simuler ces règles avec un suite d'inférences du calcul de la résolution si on dispose, parmi les clauses initiales, de formules établissant que l'égalité est réflexive, symétrique, transitive et congruentielle pour P. Cette dernière condition signifie que si $x = y$ et $P(x)$ alors $P(y)$.

— Montrez par ailleurs que si vous ajoutez de la règle de paramodulation et la règle flip au calcul de la résolution, alors les propriétés de l'égalité (?réflexivité ?, symétricité, transitivité, congruentialité) sont conséquences logiques de l'ensemble vide d'assomptions.

Exercice 8.9. Prouvez par résolution que les ensembles de closes suivants sont inconsistants

1. $\{p(x), \neg p(x) \vee \neg q(x), q(x) \vee \neg r(y), r(x) \vee s(a), r(b) \vee \neg s(x)\}$
2. $\{s(b,b,a), s(b,b,b), r(w,a), r(a,z), \neg q(b), q(x') \vee \neg p(x',z') \vee \neg p(x',w') \vee \neg r(z',w'), p(x,y) \vee \neg s(x,x,y)\}$

Exercice 8.10. Prouvez par résolution la validité de la formule suivante.

$$\exists x \exists y((p(f(x)) \wedge q(f(b))) \Rightarrow (p(f(a)) \wedge p(y) \wedge q(y)))$$

FRANÇAIS

Exercice 8.11. On se propose de traduire les phrases suivantes en logique du premier ordre :

1. Marcus était un pompéen.
2. Tous les pompéens étaient des romains.
3. César était souverain.
4. Tous les romains étaient fidèles à César ou le haissaient.
5. Chacun est fidèle à quelqu'un.
6. Les personnes n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles.
7. Marcus a essayé d'assassiner César.

Proposez :

(a) un langage du premier ordre pour modéliser ces phrases,

(b) pour chaque phrase, une formule en logique du premier ordre qui la traduit ;

(c) mettez chaque formule en forme clausale ;

(d) si vous connaissez déjà le calcul de la résolution : quelles sont les inférences que vous pouvez appliquer à ces clauses ?