Fiche de TP no. 4

Rappels

Urls de `Prover9` et `Mace4` :

http://www.cs.unm.edu/~mccune/mace4/
http://www.cs.unm.edu/~mccune/mace4/manual/2009-11A/

`Prover9` essaye de montrer que $\Gamma \models \phi$, c'est-à-dire ϕ est une conséquence logique de Γ, en utilisant des méthodes basés sur la résolution. `Mace4` essaye de montrer que $\Gamma \not\models \phi$, en construirant un modèle de Γ qui rend ϕ fausse.
Utilisation via la ligne de commande :

```
prover9-mace4-gui
```

Compréhension des outils

Exercice 1 : *Les chargés de la route.*[1] Bien que ses coéquipiers aient dans leur grande majorité avoué être aussi chargés que—dixit un enquêteur de la police judiciaire—"un bifteck de veau aux hormones", l'ancien cycliste Lance Armstrong a longtemps affirmé n'avoir eu recours à aucun produit prohibé. Le cycliste se révèle peut-être ici sur un terrain sur lequel on ne l'attendait pas, celui de la logique. S'il en connaît bien les principes, celui-ci peut en effet affirmer sans crainte que la conclusion du raisonnement suivant, à première vue correct, n'est pas une conséquence logique des hypothèses :

- Si tu te dopes, tu peux soit gagner, soit être pris.
- Si tu es un super coureur, tu peux gagner que tu sois dopé ou non.
- Lance Armstrong, qui n'est pas un super coureur, gagne des épreuves.

Donc :

- Lance Armstrong se dope.

1. Traduire ce raisonnement en utilisant la logique des prédicats du 1er ordre.
2. Utilisez `Prover9` et/ou `Mace4` pour valider ou refuter ce raisonnement.
3. Quelle affirmation, non formulée dans le raisonnement ci-dessus, nous permettrait de conclure ? Quelle hypothèse complète-t-il implicitement ? Traduisez sous forme logique cette hypothèse implicite et montrez que le raisonnement est effectivement valide.

Exercice 2 : *Malvita.* Utilisez `Prover9-Mace4` pour resoudre ce problème de Jean-Yves Antoine.[2]
Réfugié à Chollong-sur-Arve, petite bourgade de Normandie, Giovanni Manzoni, chef mafieux désormais repenti et recherché par toutes les familles de la mafia New-Yorkaise pour les avoir trahi, réfléchit sur sa vie, son passé. N'étant jamais allé à l'université, il peine à analyser de manière logique les idées qui lui viennent à la tête. Pourriez-vous l'aider en donnant la traduction, en logique des prédicats du 1er ordre, des énoncés ci-dessous ? On utilisera pour cela les prédicats Voleur/1, Assassin/1, Criminel/1, et Famille/2 et on se placera dans le domaine d'interprétation de l'ensemble des êtres humains.

- Certaines personnes sont des assassins.
- Tout assassin a déjà volé.
- Les voleurs ne sont pas tous des assassins.
- Un criminel ne peut être qu'un assassin ou un voleur (ou les deux).
- Il y a un criminel dans ma famille (c'est-à-dire la famille de Giovanni Manzoni).
- Tous les membres de ma famille (c'est-à-dire la famille de Giovanni Manzoni) sont des voleurs.

1. Source : http://www.info.univ-tours.fr/~antoine/documents_enseignement/LOGIQUE_TD.pdf.
2. Source : http://www.info.univ-tours.fr/~antoine/documents_enseignement/LOGIQUE_TD.pdf.

Giovanni en arrive alors à la conclusion suivante :

— Il n'y a pas d'assassins dans ma famille.

Nous allons utiliser la méthode de la résolution pour montrer la validité (ou non) de son raisonnement.

1. Donnez l'ensemble des clauses correspondant à la mise sous forme clausale de la formule de réfutation correspondant à ce raisonnement.
2. Est l'argumentaire de M. Manzoni valide ? Corrigez son argumentaire (aide : modifiez la nature des quantificateurs).
3. Donnez l'arbre de résolution construit par `Prover9` (ou le modèle construit par `Mace4`) qui vous permet de montrer que le raisonnement est (ou n'est pas) valide.

Exercice 3 : *Ordres totaux denses.*

1. Écrivez, dans la fenêtre des assomptions de `Prover9-Mace4`, des formules de la logique du premier ordre qui statuent que R est une relation d'ordre totale dense, et qu'ils existent au moins deux éléments. *Totale* signifie que, pour x et y arbitraires, xRy ou yRx ; *dense* signifie que si xRy avec $x \neq y$, alors on peut trouver z distinct de x et y, tel que xRz et zRy.
2. Utilisez `Mace4` pour (essayer de) trouver un modèle de ces formules.
3. Utilisez `Prover9` pour (essayer de) montrer que ces assomptions sont inconsistantes.
4. Que peut on conclure des points 2. et 3. ?
5. Pouvez vous utiliser `Prover9-Mace4` comme un algorithme pour résoudre le problème suivant : *étant donnée une formule ϕ de la logique du premier ordre, est elle satisfaisable* ?
6. Pouvez vous imaginer d'autres algorithmes ?

Des structures de donées

Exercice 4 : *Piles.* Une *pile abstraite* sur un alphabet Σ est un n'importe quel objet, ayant une notion d'état interne, sur lequel on peut appliquer les opérations

$$\texttt{pop}, \quad \texttt{push}_\sigma, \text{ pour tout } \sigma \in \Sigma.$$

De plus, on demande que si on applique depuis un état une opération $\texttt{push}_\sigma$et ensuite une opération `pop`, on revient au même état.

1. Argumentez que, si on suppose que Σ est fixé et fini, on peut comprendre la notion de pile comme étant un modèle d'un ensemble fini de formules de la logique du premier ordre sur un langage bien choisi (lequel ?)
2. Formalisez votre argumentaire, en écrivant dans la fenêtre des assomptions de `Prover9-Mace4` cette formule, dans le cas où $\Sigma = \{ 0, 1 \}$.
3. Utilisez `Mace4` pour montrer que, même dans le cas ou Σ contient un seul symbole, ce n'est pas nécessaire que si on applique depuis un état une opération `pop` et ensuite une opération $\texttt{push}_\sigma$, on revient au même état.

Exercice 5 : *Files.* Peut on définir une *file abstraite* de façon similaire à ce qu'on a fait pour les piles abstraites ? Quels sont les opérations qui spécifient les files ? Quelles sont les formules du premier ordre qui caractérisent ces opérations ?

Des maths

Exercice 6 : *Treillis.* Un treillis est un ensemble avec deux structures de monoide commutatif idempotent $(\bot, \vee)$ et $(\top, \wedge)$. En plus, les lois d'absorptions sont valides :

$$x \wedge (y \vee x) = x\,, \qquad\qquad x \vee (y \wedge x) = x\,.$$

Un treillis est distributif si $\wedge$ distribue par rapport à $\vee$:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\,.$$

Un treillis est co-distributif si $\vee$ distribue par rapport à $\wedge$.

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)\,. \tag{1}$$

1. Formalisez la théorie des treillis dans un fichier input pour `Prover9` (ou dans la fenêtre des assomptions des la `gui` de `Prover9`).
2. Utilisez `Prover9` pour montrer que si un treillis est distributif, il est alors aussi co-distributuf.
3. Utilisez les outils de visualisation des preuves pour transformer la preuve obtenue par `Prover9` dans une diagramme dans un fichier pdf.
4. A partir de la preuve trouvée par `Prover9` et de son dessin, êtes vous capables de écrire (avec papier et crayon) une preuve de l'équation (1) consistant en une suite d'équations intermédiaires ?

Exercice 7 : *Treillis et compléments.* Soit L un treillis et $x \in L$. Un complément de x est un élément $y \in L$ tel que $x \wedge y = \bot$ et $x \vee y = \top$. Que peut on dire de la conjecture « *si y et z sont deux compléments de x, alors $y = z$* »

— dans le cas général ?

— dans le cas où L est un treillis distributif ?

Utilisez les outils de visualisation des modèles pour dessiner le diagramme de Hasse des treillis produits comme contre-exemples par `Mace4`. Pour ce faire :

1. Ajoutez, parmi les assomptions, la définition de la relation $Less(x, y)$ (définie par $x \wedge y = x$).
2. Ajoutez, parmi les assomptions, la définition de la relation $Cover(x, y)$ (définie par $x \neq y$, $Less(x, y)$, et pour tout z, $Less(x, z)$ et $Less(z, y)$ implique $x = z$ ou $z = y$).
3. A partir de ces assomptions et du but, produisez un fichier output de `Mace4`. Effacez du fichier les interprétations de tous les symboles distingués de $Cover$. Utilisez les outils de visualisation avec le fichier ainsi modifié.