Quantum Walking in a Discrete Geometry

Supervisers: Pablo Arrighi (Prof.), Giuseppe Di Molfetta (MCF).

Contact details: pablo.arrighi@univ-amu.fr, 0611257467.

Place: Laboratoire d'Informatique Fondamentale (LIF), Natural Computing team (CaNa).

Scientific environment: The CaNa research group (Pablo Arrighi, Giuseppe Di Molfetta, Kevin Perrot, Sylvain Sené) seeks to capture at the formal level some of the fundamental paradigms of theoretical physics and biology, via the models and approaches of theoretical computer science and discrete mathematics. The group is located in Luminy, Marseille, France, and benefits from a rich scientific environment with the Cellular Automata experts of I2M (Pierre Guillon, Guillaume Theyssier) and the physicists from CPT (Alberto Vega, Thomas Krajewski).

Theme: Quantum Walks are the natural, quantum version of Random Walks. According to Feynman, quantum mechanics is a but theory of probabilities "with minus signs". Indeed, one could say that probabilities get replaced by complex numbers. More specifically, whereas a random walker moves either left, or right, with probability a half, a quantum walker moves left with complex amplitude α, and right with amplitude β, where $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$. Why consider such a generalization? Simply because it turns out that this is how particles behave. For instance, one can easily show [1] that the continuum limit of some quantum walk is the Dirac Equation---the equation which governs the propagation of the electron.

Discrete Geometry approximates geometry via polygons. For instance a surface (e.g. a sphere) can be approximated by gluing triangles side be side --- that's an example of a 2D simplicial complex. The aim of this internship is to study the continuum limit of quantum walks over simplicial complexes. Why do this?

First of all one may wonder if there is a quantum walk over the 2D euclidean plane, but triangulated, which still has the Dirac Equation as its continuum limit. The steps to follow towards this aim seem relatively clear to us, yet answering this question would be the student's main task, and achieving it would already mean a successful internship.

Still, once this is done, one may wonder about the continuum limits of quantum walks over simplicial complexes that are less regular. For instance when an electron propagates on a graphene sheet, the deformations of that sheet have an influence upon its propagation, which is then governed by the Dirac equation in "curved space" [2]. This is the case also whenever general relativity comes into play. Thus, one could hope that the continuum limit of quantum walk on a triangulated sphere, for instance, coincides with the Dirac equation in curved space that corresponds to the sphere.

It may be the case, moreover, that the geometry of the simplicial complex is able to encode other fields than the gravitational field---such as the electromagnetic field. We have already seen this sort of effects happen with the mass, for instance: it turns out that a quantum walk on a line with mass *m*, is equivalent to a quantum walk without mass, but on a cylinder [3]. What happens if the cylinder is irregular?

Quantum walks over discrete geometries seem to constitute a simple, discrete time, discrete space model à la Computer Science, but one that is able to grasp, with much elegance, a number of physical phenomena. They also constitute quantum algorithms (numerical schemes) for simulating physics on a Quantum Computer or other quantum simulation device. *Do get in touch for more information!*

References:

[1] http://arxiv.org/abs/1307.3524
[2] http://arxiv.org/abs/1212.5821 http://arxiv.org/abs/1505.07023
[3] http://arxiv.org/abs/1607.08191

Marche quantique sur géométrie discrète.

Encadrants: Pablo Arrighi (Prof.), Giuseppe Di Molfetta (MCF).

Contact: pablo.arrighi@univ-amu.fr, 0611257467.

Lieu: Laboratoire d'Informatique Fondamentale (LIF), équipe de Calcul Naturel (CaNa).

Environnement: L'équipe CaNa (Pablo Arrighi, Giuseppe Di Molfetta, Kevin Perrot, Sylvain Sené) vise à mieux capturer les paradigmes de base de la physique théorique ou de la biologie, au travers d'approches issues de l'informatique fondamentale, des mathématiques discrètes et de la théorie des modèles de calcul notamment. Située sur le campus de Luminy, elle bénéficie d'un environnement scientifique privilégié de part ses liens avec les experts en Automates Cellulaires de l'I2M (Pierre Guillon, Guillaume Theyssier) ou avec les physiciens du CPT (Alberto Verga, Thomas Krajewski).

Sujet: Les marches quantiques sont l'équivalent, quantique, des marches aléatoires. Feynman disait de la mécanique quantique qu'il s'agit d'une théorie des probabilités “avec des signes moins”. De fait, les probabilités y sont en quelques sortes remplacées par des nombres complexes. Concrètement, tandis qu'un marcheur aléatoire en 1D se déplace soit à gauche, soit à droite avec une probabilité ½, un marcheur quantique se déplace à gauche avec une certaine amplitude complexe α, et à droite avec amplitude β, où $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$. Pourquoi avoir considéré une telle généralisation? Car c'est effectivement comme ça que se propagent les particules quantiques en 1D. Par exemple, on peut montrer assez facilement [1] que dans sa limite au continu, une marche quantique tend vers l'équation de Dirac, qui gouverne la propagation de l'électron.

La géométrie discrète approxime la géométrie par des polygones. Par exemple une surface, comme une sphère, peut être approximée en collant des triangles côte-à-côte, cf. la géode. C'est ce qu'on appelle un complexe simpliciel 2D. Le stage consiste à étudier les limites au continu des marches quantiques sur les complexes simpliciaux. Pourquoi s'intéresser à cette question?

On peut se demander, dans un premier temps, si une marche quantique sur le plan euclidien 2D, mais triangulé, peut continuer à admettre l'équation de Dirac dans sa limite au continu. Les étapes de raisonnement et de calculs à mener pour élucider cette question nous semblent relativement clairs. Néanmoins cette question constitue l'objectif principal du stage: l'étudiant qui les mènera à bien aura déjà bien rempli sa part du contrat.

Mais, dans un second temps, on peut s'interroger sur les limites au continu des marches quantiques sur des complexes simpliciaux plus irréguliers. Par exemple quand un électron se propage sur une feuille de graphène, les déformations de la feuille font que sa propagation est désormais régie par l'équation de Dirac “en espace courbe” [2]. C'est aussi le cas lorsque s'invite la relativité générale. On peut donc se demander, dans un second temps, si une marche quantique sur une sphère triangulée, par exemple, converge bien vers l'équation de Dirac en espace courbe correspondant à la sphère.

Il est possible, aussi, que la géométrie du complexe simpliciel puisse servir à encoder des champs autres que la gravité, comme le champs électromagnétique. Nous avons déjà pu observer ce genre d'effet avec la masse, par exemple: une marque quantique sur une ligne avec masse *m* équivaut à une marche quantique sans masse, mais sur un cylindre [3]. Qu'en est-il si le cylindre est irrégulier?

Les marches quantiques sur géométries discrètes nous semblent constituer un modèle simple, temps discret et espace discret, à l'informaticienne, mais capable de capturer élégamment de nombreux phénomènes physiques. Elles fournissent ainsi des algorithmes (schémas numériques) pour les ordinateurs quantiques, ou autres dispositifs quantiques dédiés à simuler la physique. *N'hésitez pas à prendre contact pour en savoir davantage.*

[1] http://arxiv.org/abs/1307.3524
[2] http://arxiv.org/abs/1212.5821 http://arxiv.org/abs/1505.07023
[3] http://arxiv.org/abs/1607.08191