Élève 1 :

Cours : (4) Preuve du théorème de Gauss et de l'existence et unicité de la forme irréductible d'un rationnel non nul.

Exercice 1

1. Existe-t-il deux entiers relatifs u et v tels que $13u + 30v = 97$?
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $13x + 30y = 97$.

Exercice 2 ($a^r - 1$ **premier et nombres de Mersenne)**

1. On suppose que $a^r - 1$ est premier. Montrer que r est premier, puis que a vaut 2.
2. Réciproquement, on considère les nombres de Mersenne définis par $M_n = 2^n - 1$. Montrer que M_{11} est composé.

Élève 2 :

Cours : (2) Les multiples communs à a et b sont les multiples du PPCM(a, b). Homogénéité du PPCM.

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{Z}$, impair, et non divisible par 3. Montrer que $24 \mid n^2 - 1$.

Exercice 4 (Congruences simultanéss)

1. Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ avec $b \wedge b' = 1$. Montrer que le système : $\begin{cases} x \equiv a[b] \\ x \equiv a'[b'] \end{cases}$ possède des solutions et qu'elles sont congrues entre elles modulo bb'.
2. Généraliser à n entiers 2 à 2 premiers entre eux.
3. Application : Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces.
   Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.
   Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.
   Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Élève 3 :

Cours : (1) Tout eniter relatif non nul distinct de 1 et -1 admet au moins un diviseur premier et il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :

1. $\begin{cases} x \wedge y = 13 \\ x \vee y = 286 \end{cases}$
2. $x \vee y - x \wedge y = 77$
3. $\begin{cases} 5x - 2y = 357 \\ x \wedge y = 119 \end{cases}$

Exercice 6 (pgcd$(a^n - 1, a^m - 1)$)
Soient $a, m, n \in \mathbb{N}^*$, $a \geq 2$, et $d = (a^n - 1) \wedge (a^m - 1)$.

1. Soit $n = qm + r$ la division euclidienne de n par m. Démontrer que $a^n \equiv a^r [a^m - 1]$.
2. En déduire que $d = (a^r - 1) \wedge (a^m - 1)$, puis $d = a^{(n \wedge m)} - 1$.
3. A quelle condition $a^m - 1$ divise-t-il $a^n - 1$?