Élève 1 :

Cours : (4) Sachant que les coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$ de $M(t)$ dans $R_0 = (M(t_0), \overrightarrow{F}^{(p)}(t_0), \overrightarrow{F}^{(q)}(t_0))$ sont respectivement équivalentes à $(t-t_0)^p/p!$ et $(t-t_0)^q/q!$ en t_0, expliquer selon les parités de p et q, la position de C par rapport à la tangente en $M(t_0)$.

Exercice 1 (DL)
Donner un développement limité de la fonction suivante à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$:
$x \mapsto \frac{1}{x}(\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2})$

Exercice 2 (DL)
Donner un développement limité de la fonction suivante à l'ordre 4 au voisinage de 0 :
$x \mapsto \arctan(1+x+x^2)$

Élève 2 :

Cours : (3) Théorème d'intégration d'un développement limité : pour h réel strictement positif , n naturel non nul et F dérivable de $]-h,h[$ dans $\mathbb{R}$ telle que F' ait un DL$_n$ en 0, alors F admet un DL$_{n+1}$ en 0 dont on connaît la partie régulière. Cas de $x \to \ln(1+x)$.

Exercice 3 (DL)
Donner un développement limité de la fonction suivante à l'ordre 5 au voisinage de 0 :
$x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$

Exercice 4
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et $x_0 \in I$. Calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$$

Élève 3 :

Cours : (2) Calculs des développements limités en 0 à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) de $x \to \sqrt{1+x}$ et $x \to \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ connaissant celui de $x \to (1+x)^a$, a un réel non nul.

Exercice 5 (DL)
Donner un développement limité de la fonction suivante à l'ordre 4 au voisinage de 0 :
$x \mapsto \ln(1+x+\sqrt{1+x})$

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, telle que les fonctions f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. On pose $M_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ et $M_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f''(t)|$.

1. Montrer que pour tout réel x, et tout réel $h > 0$, $|f'(x)| \leq \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$.
2. En déduire : $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.