## Élève 1 :

**Cours :** (5) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $M.{}^t\text{Com}(M) = {}^t\text{Com}(M).M = \det(M).I_n$.

**Exercice 1**
Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

**Exercice 2 (Problème d'interpolation de Lagrange)**
Soit $A$ un *anneau* commutatif, $x_0, \ldots, x_n \in A$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

- **a.** Le déterminant de Vandermonde de $x_0, \ldots, x_n$ est un élément inversible de $A$ ;
- **b.** Pour tous $y_0, \ldots, y_n \in A$, il existe un unique polynôme $P \in A_n[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \ldots, n$.

Donner un exemple d'anneau $A$ et un problème d'interpolation dans $A$ (en des points $x_i$ distincts) n'ayant pas de solution.

**Exercice 3**

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.
2. Chercher $A, B$ telles que $\det(A^2 + B^2) < 0$.

**Élève 2 :**

**Cours :** (1) Les formes bilinéaires antisymétriques sur $E$ sont les formes bilinéaires alternées sur $E$.

**Exercice 4**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $A$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, on pose

$$D_j = \underset{i \neq j}{\phantom{x}} C_i$$

et on note $D$ la matrice dont les colonnes sont $D_1, \dots, D_n$. Calculer det $D$ en fonction de det $A$.

**Exercice 5 (Résultant)**

Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$, et $Q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_q X^q$, avec $a_p \neq 0,\ b_q \neq 0$.

On définit la matrice $M(P,Q) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ :

$$M(P,Q) = \begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & & q & q+1 & & & & q+p \\
\hline
1 & a_0 & & & b_0 & & & & \\
 & a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & & & \\
q & \vdots & & a_0 & \vdots & & \ddots & & \\
 & \vdots & & \vdots & b_q & & & \ddots & \\
p & a_{p-1} & & \vdots & & \ddots & & & b_0 \\
p+1 & a_p & & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
 & & \ddots & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\
p+q & & & a_p & & & & & b_q
\end{array}$$

et on pose Res$(P,Q) =$ det$(M(P,Q))$.

En considérant l'application $\Phi \begin{array}{ll} \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] & \to \mathbb{K}_{p+q-1}[X] \\ (U,V) & \mapsto UP + VQ \end{array}$, montrer que :

$$\text{Res}(P,Q) \neq 0 \iff P \wedge Q = 1$$

.

Application : CNS pour que le polynôme $P = X^4 + aX + b$ ait une racine multiple ?

**Élève 3 :**

**Cours :** (3) Déterminants d'une composée de deux endomorphismes de $E$ et d'un produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 6** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

**Exercice 7**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $U$ l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $1$. On pose $P = \det(A + XU)$. Montrer que $P \in \mathbb{R}_1[X]$.
2. Application. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer

$$\begin{vmatrix} c & a & \cdots & \cdots & a \\ b & c & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & \cdots & b & c \end{vmatrix}$$

**Exercice 8**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le déterminant d'ordre $p + 1$ suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & \cdots & C_n^p \\ 1 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{n+1}^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_{n+p}^1 & \cdots & C_{n+p}^p \end{vmatrix}$$