Élève 1 :

Exercice 1 (CCP1997)
Étudier les extrema de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2y - x$ sur le disque fermé unité de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait $f(x, y) = \varphi(y)$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. Montrer qu'il existe deux fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait $f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$.

Élève 2 :

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Conclusion ?

Exercice 4 (Théorème d'Euler)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite **homogène de degré** α si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, f est homogène de degré α si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

Élève 3 :

Exercice 5
Étudier les extrema de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2y + \ln(1 + y^2)$.

Exercice 6 L'objectif de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{E}$$

avec $b^2 - ac \geq 0$.

1. Soit $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$ tel que $AD - BC \neq 0$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'on ait :

$$f(x, y) = g(Ax + By, Cx + Dy)$$

   On dit qu'on a fait le changement de variables $X = Ax + By$, $Y = Cx + Dy$.

2. En choisissant judicieusement A, B, C et D, résoudre (E).
   Application Numérique : résoudre l'EDP

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$