

Élève 1 :

Exercice 1

Calculer $\int \int_D f(x, y) dx dy$ avec $D = \{y \geq 0, x + y \leq 1, y - x \leq 1\}$ et $f(x, y) = x^2 y$.

Exercice 2 (Intégrale de Gauss)

Calcul de $I = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Justifier la convergence de cette intégrale.
2. Pour $a > 0$ on note $\Delta_a = [0, a] \times [0, a]$ et C_a le quart de disque d'équations : $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x \geq 0, y \geq 0$.
 - (a) Encadrer l'intégrale sur Δ_a de $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ par les intégrales de f sur des domaines du type C_b .
 - (b) Calculer $\int \int_{C_b} f(x, y) dx dy$ en polaires et en déduire la valeur de I .

Élève 2 :

Exercice 3 (ENSI PC 1999)

Calculer $\int \int_{\Delta} (x^2 + xy + y^2) dx dy$ où $\Delta = \{(x, y) \text{ tq } y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \text{ et } x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$.

Exercice 4

Calculer l'aire du domaine délimité par la boucle droite de la lemniscate de Bernoulli dont l'équation polaire est donnée par $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$ avec $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et $a > 0$.

Exercice 5 (Chimie P 1996)

Calculer l'aire délimitée par la courbe d'équation $(y - x)^2 = a^2 - x^2$.

Élève 3 :

Exercice 6

Calculer l'aire du domaine délimité par la strophoïde droite dont l'équation polaire est donnée par $r = -a \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$ avec $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $a > 0$.

Exercice 7 (ESEM 94)

Calculer $I = \int \int_{\Delta} xy dx dy$ où $\Delta = \{(x, y) \text{ tq } y \geq 0 \text{ et } (x + y)^2 \leq 2x/3\}$.

Exercice 8 (Ensi P 90)

Soit \mathcal{P} le plan rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.