Magistère d'Informatique et de Mathématiques
ENS de Cachan
TD de Théorie des Langages

à rendre pour le jeudi 18 mai

Devoir à la maison 2

Dans ce devoir, on étudie une sous-classe des automates à pile.

Définition 1 (Automate à pile restreint)
Soit $\widetilde{\Sigma} = \langle \Sigma_c, \Sigma_r, \Sigma_l \rangle$ un *alphabet d'actions* constitué de trois alphabets disjoints. On note $\Sigma = \Sigma_c \cup \Sigma_r \cup \Sigma_l$. On appelle *automate à pile restreint* sur $\widetilde{\Sigma}$, un automate à pile $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, Z, T, \perp, q_0, F, \rangle$ tel que, si $T(q, z, a)$ dénote l'ensemble des transitions de T de la forme $(q, z, a, \cdot, \cdot)$:

– pour tout *appel* $a \in \Sigma_c$, pour tout état $q \in Q$ et tout sommet de pile $z \in Z$, $T(q, z, a)$ ne dépend pas de z et $T(q, z, a) \subseteq \{(q, z, a, zy, q') | y \in Z \text{ et } q' \in Q\}$ (*push* uniquement).
– pour tout *retour* $a \in \Sigma_r$, pour tout état $q \in Q$ et tout sommet de pile $x \in Z$, $T(q, x, a) \subseteq \{(q, z, a, \varepsilon, q') | q' \in Q\}$ (*pop* uniquement).
– pour toute action interne $a \in \Sigma_l$, pour tout état $q \in Q$ et tout sommet de pile $z \in Z$, $T(q, z, a)$ ne dépend pas de z et $T(q, z, a) \subseteq \{(q, z, a, z, q') | q' \in Q\}$ (*skip* uniquement).

$\perp$ est le symbole de fin de pile, q_0 l'état initial et $F \subseteq Q$ l'ensemble des états finaux.

On note $L(\mathcal{A})$ le langage $\subseteq \Sigma^*$ reconnu par $\mathcal{A}$ (on s'intéresse ici à une reconnaissance par état final).

Définition 2 (Langage algébrique restreint)
Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est un *langage algébrique restreint* par rapport à $\widetilde{\Sigma}$ s'il existe un automate à pile restreint $\mathcal{A}$ sur $\widetilde{\Sigma}$ qui reconnaît L : $L = L(\mathcal{A})$.

Question 1 Montrer que si L est un langage algébrique sur l'alphabet Σ, alors il existe un langage algébrique restreint L' par rapport à l'alphabet $\widetilde{\Sigma} = (\Sigma \times \{c\}) \cup (\Sigma \times \{r\}) \cup (\Sigma \times \{l\})$ tel que si h est la projection qui associe a à (a, s) pour $s \in \{c, r, l\}$, alors $L = h(L')$.

Définition 3 (Renommage)
Un *renommage* de $\widetilde{\Sigma}$ en $\widetilde{\Sigma}'$ est une fonction $f : \Sigma \to \Sigma'$ telle que $f(\Sigma_c) \subseteq \Sigma'_c$, $f(\Sigma_r) \subseteq \Sigma'_r$ et $f(\Sigma_l) \subseteq \Sigma'_l$. On étend le renommage f au mots sur Σ par $f(a_1 \cdots a_n) = f(a_1) \cdots f(a_n)$.

Question 2 Montrer que les langages algébriques restreints sont stables par union, renommage, concaténation et étoile. Plus précisément, si L_1 et L_2 sont des langages algébriques restreints par rapport à $\widetilde{\Sigma}$ et f un renommage de $\widetilde{\Sigma}$ en $\widetilde{\Sigma}'$ montrer que $L_1 \cup L_2$, $f(L_1)$, $L_1 \cdot L_2$ et L_1^* sont des langages algébriques restreints par rapport à $\widetilde{\Sigma}$.

Question 3 Montrer que, contrairement aux langages algébriques, les langages algébriques restreints sont stables par intersection : si L_1 et L_2 sont des langages algébriques restreints par rapport à $\widetilde{\Sigma}$, alors $L_1 \cap L_2$ est encore algébrique restreint par rapport à $\widetilde{\Sigma}$.

Définition 4 (Automates à pile restreints déterministes)
$\mathcal{A} =$ est *déterministe* si pour tout état $q \in Q$, pour tout symbole de pile $z \in Z$ et toute lettre $a \in \Sigma$, $|T(q, z, a)| \leq 1$.

Question 4 Montrer que pour tout $\mathcal{A}$ automate à pile restreint par rapport à $\widetilde{\Sigma}$, il existe $\mathcal{A}'$ un automate à pile déterministe restreint par rapport à $\widetilde{\Sigma}$ tel que $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$.
On pourra donner à partir de $\mathcal{A}$ de taille n ($|Q| = n$) un automate à $O(2^{n^2})$ états et un alphabet de pile de taille $O(2^{n^2} \cdot |\Sigma_c|)$.

Question 5 En déduire que les problèmes d'universabilité et d'inclusion sont décidables pour les langages algébriques restreints. Donner la complexité de votre méthode pour ces deux problèmes.

Définition 5 (Grammaire algébrique restreinte)
Une grammaire algébrique $G = \langle V, S, \Sigma, P \rangle$ est une *grammaire algébrique restreinte* vis à vis de la partition $\widetilde{\Sigma} = \Sigma_c \cup \Sigma_r \cup \Sigma_l$ si l'ensemble V des non-terminaux est partitionné en deux ensembles disjoints V^0 et V^1 tels que toutes les productions de G sont de la forme :
- $X, \varepsilon \longrightarrow$;
- $X, aY \longrightarrow$ où si $X \in V^0$ alors $a \in \Sigma_l$ et $Y \in V^0$;
- $X, aYbZ \longrightarrow$ où $a \in \Sigma_c$, $b \in \Sigma_r$, $Y \in V^0$ et si $X \in V^0$ alors $Z \in V^0$.

Question 6 Montrer que pour un alphabet d'acceptation $\widetilde{\Sigma}$, un langage est algébrique restreint si et seulement si il est engendré par une grammaire algébrique restreinte.