Théorie des Langages

Magistère STIC

Examen du 1er juin 2006

durée 3 heures

Les documents sont autorisés.
Les exercices sont indépendants.
Toutes les réponses devront être correctement justifiées.
Le barème (sur 26) n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié.
La note sera bien sûr ramenée à 20.

1 Grammaires LL et automates à pile (5+1 points)

On considère la grammaire G définie par

$$\begin{array}{rlll} 1: & S & \longrightarrow & aaSbb \\ 2: & S & \longrightarrow & a \\ 3: & S & \longrightarrow & \varepsilon \end{array}$$

a) Montrer que la grammaire G est LL(2) mais pas LL(1).

b) Montrer que le langage engendré par G peut être engendré par une grammaire LL(1).

c) Donner un automate à pile déterministe qui accepte le langage engendré par G. N'oubliez pas de justifier que l'automate accepte bien le langage engendré par G.
Le bonus sera accordé si l'automate à pile déterministe est aussi temps-réel.

2 Automates à pile à double sens (5 points)

Un automate à pile à double sens peut, à chaque transition, déplacer sa tête de lecture vers la gauche ou vers la droite ou encore la laisser sur place. De plus, on supposera que la donnée w est encadrée par 2 symboles spéciaux (marqueurs) $\triangleleft$ et $\triangleright$. Le mot w est donc accepté par l'automate s'il y a un calcul réussi sur $\triangleleft w \triangleright$.

De façon équivalente, un automate à pile à double sens est une machine de Turing qui ne peut pas modifier sa bande d'entrée et qui a une seule bande de travail et elle est utilisée comme une pile.

a) Montrer que le langage $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ peut être accepté par un automate à pile déterministe à double sens.

b) Montrer que le langage $\{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$ peut être accepté par un automate à pile déterministe à double sens.

3 Mélanges de mots et langages rationnels (10 points)

Soit Σ un alphabet et $u,v \in \Sigma^*$ deux mots. Le mélange de u et v est le langage

$$u \sqcup\!\sqcup\, v = \{u_1v_1 \cdots u_nv_n \mid n \geq 0,\ u_i,v_i \in \Sigma^*,\ u = u_1 \cdots u_n \text{ and } v = v_1 \cdots v_n\}.$$

Cette opération est étendue aux langages en posant pour $K,L \subseteq \Sigma^*$

$$K \sqcup\!\sqcup\, L = \bigcup_{u \in K, v \in L} u \sqcup\!\sqcup\, v.$$

Pour les trois questions qui suivent, on fixe l'alphabet $\Sigma = \{a,b,c\}$ et les deux langages $K = \Sigma^*ab\Sigma^*$ et $L = \Sigma^*b\Sigma^*$.

a) Donner des automates non déterministes pour les langages K, L et $K \sqcup\!\sqcup\, L$.

b) Déterminiser l'automate de $K \sqcup\!\sqcup\, L$.

c) Minimiser l'automate obtenu à la question précédente.

Dans la suite, l'alphabet Σ et les langages K et L sont de nouveau arbitraires. On introduit une copie $\overline{\Sigma}$ de l'alphabet Σ et les morphismes Π, Π_1 et Π_2 de $(\Sigma \cup \overline{\Sigma})^*$ dans Σ^* définis pour $a \in \Sigma$ par $\Pi(a) = \Pi(\overline{a}) = a$, $\Pi_1(a) = \Pi_2(\overline{a}) = a$, et $\Pi_1(\overline{a}) = \Pi_2(a) = \varepsilon$.

d) Montrer que $K \sqcup\!\sqcup\, L = \Pi(\Pi_1^{-1}(K) \cap \Pi_2^{-1}(L))$.
En déduire que si K et L sont rationnels alors $K \sqcup\!\sqcup\, L$ est aussi rationnel.

On définit le langage $E(K,L) = \{v \in \Sigma^* \mid (K \sqcup\!\sqcup\, v) \cap L \neq \emptyset\}$.

e) Montrer que si K et L sont rationnels alors $E(K,L)$ est aussi rationnel.
Indication : on pourra procéder de façon similaire à la question précédente.

On définit le langage $A(K,L) = \{v \in \Sigma^* \mid K \sqcup\!\sqcup\, v \subseteq L\}$.

f) Montrer que si K et L sont rationnels alors $A(K,L)$ est aussi rationnel.

g) Montrer qu'il existe un langage $K' \subseteq \Sigma^*$ tel que $K \sqcup\!\sqcup\, K' = L$ si et seulement si $K \sqcup\!\sqcup\, A(K,L) = L$.

h) Montrer que si K et L sont rationnels alors on peut décider de l'existence d'un langage $K' \subseteq \Sigma^*$ tel que $K \sqcup\!\sqcup\, K' = L$.

4 Mélanges de mots et langages algébriques (6 points)

On considère les langages $K = \{u \in \{a,b\}^* \mid |u|_a = |u|_b\}$ et $L = \{u \in \{c,d\}^* \mid |u|_c = |u|_d\}$.

a) Montrer que le langage K est algébrique.

b) (*) Le langage $K \sqcup\!\sqcup\, L$ est-il algébrique ? Justifier la réponse.