Magistère d'Informatique et de Mathématiques
ENS de Cachan *Mercredi 26 Avril 2006*
TD de Théorie des Langages

Grammaires (3)

Exercice 1 (Dyck à n paires de parenthèses)
Soit $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ l'alphabet formé de n paires de parenthèses. Un mot $w \in \Sigma^*$ est *bien parenthésé* s'il est équivalent au mot vide dans la congruence engendrée par $a_i\bar{a}_i \equiv \varepsilon$ pour $1 \leq i \leq n$.
Montrer que le langage de Dyck $D_n^* = \{w \in \Sigma^* \mid w \equiv \varepsilon\}$ est engendré par la grammaire $S \to a_1S\bar{a}_1S + \ldots + a_nS\bar{a}_nS + \varepsilon$.

Exercice 2 (Problèmes indécidables)
Soit L un langage algébrique. Montrer que les problèmes suivants sont indécidables :
- $L = \Sigma^*$?
- L est-il ambigu ?

Exercice 3 (Forme normale de Greibach)
Soit $G = (\Sigma, V, P, S)$ une grammaire algébrique de langage associé non vide.
- G est en *forme normale presque Greibach* si toutes les productions de P sont de la forme $X \longrightarrow a\alpha$ avec $a \in \Sigma$ et $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$,
- G est en *forme normale de Greibach* si toutes les productions de P sont de la forme $X \longrightarrow a\alpha$ avec $a \in \Sigma$ et $\alpha \in V^*$.

1. Soit G une grammaire algébrique, $X \longrightarrow \alpha_1 Y \alpha_2$ une règle de P et soit
$$Y \longrightarrow \beta_1 + \cdots + \beta_m$$
l'ensemble des règles de P ayant Y comme membre gauche. Montrer que la grammaire G' obtenue en remplaçant la règle $X \longrightarrow \alpha_1 Y \alpha_2$ par les règles $X \longrightarrow \alpha_1 \beta_i \alpha_2$ (pour $1 \leq i \leq m$) engendre le même langage que G.
2. Soit G une grammaire algébrique propre, $X \longrightarrow X\alpha_1 + \ldots X\alpha_r$ l'ensemble des règles de P ayant X comme membre gauche et X comme symbole le plus à gauche dans les membres droits, $X \longrightarrow \beta_1 + \cdots + \beta_s$ le reste des règles de P ayant X comme membre gauche. Montrer que la grammaire G' obtenue en ajoutant une variable Z et en remplaçant l'ensemble des règles ayant X comme membre gauche par les règles
$$X \longrightarrow \beta_1 Z + \ldots \beta_s Z + \beta_1 + \cdots + \beta_s$$
et
$$Z \longrightarrow \alpha_1 Z + \ldots \alpha_r Z + \alpha_1 + \ldots \alpha_r$$
engendre le même langage que G.

3. On considère une grammaire algébrique $G = (\Sigma, V, P, S)$, propre et réduite. On suppose que $V = \{X_1 \dots X_n\}$ et $S = X_1$. Montrer que l'on peut construire une suite $(G_i)_{0 \leq i \leq n}$ de grammaires engendrant le même langage que G telles que $G_0 = G$ et pour tout $0 \leq i \leq n$, G_i a pour ensemble de non-terminaux $V_i = V \cup \{Z_1 \dots Z_i\}$ et vérifie que pour toute règle $X_k \longrightarrow \gamma$,
   - γ ne commence pas par un non-terminal de $\{X_1 \dots X_k\} \cup \{Z_1 \dots Z_i\}$ si $k \leq i$
   - γ ne commence pas par un non-terminal de $\{X_1 \dots X_i\} \cup \{Z_1 \dots Z_i\}$ si $k > i$

   En déduire qu'on peut obtenir à partir de G_n une grammaire algébrique sous forme normale de Greibach engendrant le même langage que G.

Exemple Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Greibach :

$$
\begin{aligned}
A_1 &\longrightarrow A_2 A_3 \\
A_2 &\longrightarrow A_3 A_1 \mid b \\
A_3 &\longrightarrow A_1 A_2 \mid a
\end{aligned}
$$