Magistère d'Informatique et de Mathématiques
ENS de Cachan *Jeudi 16 Mars 2006*
TD de Théorie des Langages

Automates d'arbres (2)

Applications du Lemme d'itération.

Exercice 1 (Langages d'arbres)
Pour chacun des langages d'arbres suivants, déterminer s'il est reconnaissable. Pour cela on exhibera un automate d'arbre le reconnaissant, ou on prouvera qu'il n'en existe pas. Dans le premier cas, décider s'il est ou non reconnaissable par un automate déterministe descendant.
- Reprendre chacun des langages d'arbres étudiés dans le TD5.
- Étant donné $\mathcal{F} = \{f(2), g(1), a(0)\}$ et le terme $t = f(f(a,x), g(y))$. On définit l'ensemble $G(t) = \{f(f(a,u), g(v)) \mid u, v \in T(\mathcal{F})\}$ des instance de t. Considérer le langage d'arbres associé à $G(t)$.
- Étant donné $\mathcal{F} = \{f(2), g(1), a(0)\}$ et le terme $t = f(a, g(x))$. On définit l'ensemble $M(t) = \{C[t'] \mid C \in \mathcal{C}(\mathcal{T}), t' \in G(t)\}$ des termes ayant une instance de t comme sous terme. Considérer le langage d'arbres associé à $M(t)$.
- Soit $\mathcal{F} = \{f(2), a(0)\}$. Considérer l'ensemble $L = \{t \in T(\mathcal{F}) \mid |\mathrm{Dom}(t)|$ est un nombre premier$\}$.
- Soit $\mathcal{F} = \{f(2), a(0)\}$. Considérer l'ensemble $L = \{f(t,t) \mid t \in T(\mathcal{F})\}$.

Exercice 2 (Associativité, et commutativité)
Soit $\mathcal{F} = \{f(2), a(0), b(0)\}$.

1. Considérons l'ensemble des termes clos L_1 défini par les deux conditions suivantes :
   - $f(a,b) \in L_1$,
   - $t \in L_1 \implies f(a, f(t,b)) \in L_1$.

   Montrer que L_1 est reconnaissable.
2. Montrer que l'ensemble $L_2 = \{t \in T(\mathcal{F}) \mid |t|_a = |t|_b\}$ n'est pas reconnaissable.
3. Soit L un langage d'arbres sur $\mathcal{F}$ reconnaissable. Supposons que f est un symbole commutatif. Soit $C(L)$ la clôture par congruence de l'ensemble L pour l'ensemble d'équations $C = \{f(x,y) = f(y,x)\}$. Montrer que $C(L)$ est reconnaissable.
4. Soit L un langage d'arbres sur $\mathcal{F}$ reconnaissable. Supposons que f est un symbole commutatif et associatif. Soit $AC(L)$ la clôture par congruence de l'ensemble L pour l'ensemble d'équations $AC = \{f(x,y) = f(y,x); f(x, f(y,z)) = f(f(x,y),z)\}$. Montrer que $AC(L)$ n'est en général pas reconnaissable.
5. Soit L un langage d'arbres sur $\mathcal{F}$ reconnaissable. Supposons que f est un symbole associatif. Soit $A(L)$ la clôture par congruence de l'ensemble L pour l'ensemble d'équations $A = \{f(x, f(y,z)) = f(f(x,y),z)\}$. Montrer que $A(L)$ n'est en général pas reconnaissable.

Exercice 3 (Associativité, et commutativité - Suite)
Soit $\mathcal{F}$ un alphabet ordonné dont certains symboles sont associatifs et commutatifs. L'ensemble des AC-instances closes d'un terme t est la clôture par AC-congruence de l'ensemble $G(t)$. Montrer que l'ensemble des AC-instances closes d'un terme linéaire t est reconnaissable. Comparer ce résultat avec les résultats obtenus dans l'exercice précédent.

Propriétés de clôture.

Exercice 4 (Opérations booléennes)
Montrer que la classe des langages d'arbres reconnaissables est close par les opérations booléennes (union, intersection et complémentaire). Proposer des constructions préservant le déterminisme ascendant.

Exercice 5 (Homomorphismes d'arbres)
Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux ensembles de symboles de fonctions, éventuellement non disjoints. Pour tout $n > 0$ tel que $\mathcal{F}$ contient un symbole d'arité n, nous définissons un ensemble de variables $\mathcal{X}_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Soit $h_{\mathcal{F}}$ une application qui, à tout élément $f \in \mathcal{F}$ d'arité n, associe un terme $t_f \in T(\mathcal{F}', \mathcal{X}_n)$.
L'homomorphisme d'arbres $h : T(\mathcal{F}) \to T(\mathcal{F}')$ déterminé par $h_{\mathcal{F}}$ est défini inductivement par :
- $h(a) = t_a \in T(\mathcal{F}')$ pour tout $a \in \mathcal{F}$ d'arité 0,
- $h(f(t_1, \ldots, t_n)) = t_f\{x_1 \leftarrow h(t_1), \ldots, x_n \leftarrow h(t_n)\}$.

Un homomorphisme est dit linéaire si toutes les images de l'application associée sont des termes linéaires.
Exemple : On considère les deux ensembles $\mathcal{F} = \{g(3), a(0), b(0)\}$ et $\mathcal{F}' = \{f(2), a(0), b(0)\}$.
On définit l'application suivante :

$$h : \begin{cases} \mathcal{F} & \rightarrow & T(\mathcal{F}', \mathcal{X}_3) \\ g & \mapsto & f(x_1, f(x_2, x_3)) \\ a & \mapsto & a \\ b & \mapsto & b \end{cases}$$

Calculer l'image par l'homomorphisme d'arbres associé à h du terme $t = g(a, g(b, b, b), a)$.
Démontrer les propriétés suivantes :

1. les homomorphismes préservent par image réciproque la reconnaissabilité.
2. les homomorphismes linéaires préservent (par image directe) la reconnaissabilité,

Donner un exemple d'homomorphisme non linéaire ne préservant pas la reconnaissabilité par image directe.