Feuille d'Exercices II:
Re-formulations et relaxations

Cours OC 2011-2012

Chaque étudiant devra rendre les exercices pour le premier cours de janvier

Exercice 1 Consid rons un probl me de sac- -dos quadratique qui consiste en la minimisation d'une fonction quadratique sous une contrainte lin aire avec des variables entieres :

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b, x \in \{0,1\}^n \} \right\} \tag{1}$$

Ce probl me peut se reformuler comme un programme lin aire mixte en utilisant les propri t s des variables $\{0, 1\}$.

1. Montrer que (1) peut s' crire comme :

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^{n} (c_j + q_{jj}) x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (q_{ji} + q_{ij}) x_i x_j : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b, x \in \{0,1\}^n \} \right\} \tag{2}$$

2. On introduit une variable y_{ij} pour repr senter le produit $x_i x_j$. Quelle contraintes lin aire doivent porter sur y_{ij} pour que y_{ij} soit gal $x_i x_j$ quand x_i et x_j sont $0/1$?
3. Reformulez le probl me comme un probl me lin aire mixte en utilisant les variables y_{ij}.

Exercice 2 On consid re le Programme Lin aire Mixte :

$$\min\{c^T x : Ax \geq b,\ x \geq 0,\ x_j \in \{0,1\}\, j \in I \subseteq \{1,\ldots,n\}\} \tag{3}$$

(o A est une matrice $m \times n$, b un vecteur m composantes et c un vecteur à n composantes).
Soit $u \in \mathbb{R}^m$ tel que $u \geq 0$. Montrez que

$$\min\{c^T x : \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_i a_{ij} x_j \geq \sum_{i=1}^{m} u_i b_i,\ x \geq 0,\ x_j \in \{0,1\}\, j \in I \subseteq \{1,\ldots,n\}\}$$

est une relaxation de (3).

Exercice 3 Formulez le probl me du voyageur de commerce en utilisant des variables x_{ijk} o x_{ijk} vaut 1 si et seulement si (i, j) est le k^{me} arc du tour.