Quelques résultats expérimentaux

Pierre Bonami

M06 - 2010/2011

17 janvier 2011

Expérimentation des algorithmes

Un paradoxe ?

La programmation en nombres entiers est NP-Difficile, donc tous les algorithmes qu'on connait ont une complexité exponentielle. Cependant, on peut

- résoudre des TSP avec des millions de villes,
- résoudre des problèmes industrielles avec des millions de variables,
- et de plus en plus rapidement chaque année,…

Non, pas de paradoxe

- Les études théoriques donnent une vue partielle de la complexité des algorithmes (pire cas/cas moyen) et très limitées par nos capacités d'analyse,…
- Il existe bien des problèmes de petite taille qu'on ne sait pas résoudre.
- L'avantage de l'informatique est qu'il est *facile* d'expérimenter.
- Peut-on utiliser l'expérimentation pour nous aider à trouver de meilleurs algorithmes ?

Difficultés de l'expérimentation

Typiquement, on voudrait comparer k algorithmes en les faisant tourner sur n instances *représentatives* et désigner un gagnant.

Difficultés

- Que veut dire "n instances *représentatives*" ? Comment s'accorder sur un ensemble d'instances ?
- Comment s'assurer que les codes sont justes ?
- Expériences biaisées ? Les codes sont-ils vraiment comparables ?
- Mes résultats sont-ils statisquement significatifs ?
- Faire une expérience qui à un sens.

Choix des instances

- En général des instances aléatoires représentent mal la réalité.
- On doit surement trouver un compromis entre plusieurs biais :
  - Si on considère uniquement les problèmes qu'on ne sait pas résoudre, l'expérience ne donne aucun résultat.
  - Si on considère uniquement des problèmes qu'on sait résoudre, va-t-on progrésser ?
  - Pour tout problème NP-difficile et tout algorithme, il est possible de trouver un ensemble d'instance sur lesquels l'algorithme marche très mal (sauf si $P = NP$).

  En pratique
  - Un industriel peut collectionner les problèmes de ses clients qu'il veut résoudre.
  - Dans le monde académique, on se met d'accord sur un ensemble de problème (incovénient : peu de problèmes et évolue rarement)

Codes justes ? comparables ? résultats statisquement significatifs ?

Hélas, vraisemblablement, personne ne s'intéresse à ces questions sérieusement !

Quelques exemples :

- Peut on baser une expérience scientifique sur un logiciel dont on ne connait pas le code source ?
- L'algorithme de branch-and-cut est devenu très compliqué. De petits changements peuvent avoir un effet incontrolable.
- On essaiera de montrer des exemples...

Évolution de CPLEX

Table: Temps de calcul de 12 versions de Cplex sur un ensemble de 1,734 instances de MIP. Temps normalizés avec Cplex 11.0. Source [Lodi 2010, Achterberg et Bixby 2009]

Cplex version	année	better	worse	temps
11.0	2007	–	–	1.00
10.0	2005	201	650	1.91
9.0	2003	142	793	2.73
8.0	2002	117	856	3.56
7.1	2001	63	930	4.59
6.5	1999	71	997	**7.47**
6.0	1998	55	1060	21.30
5.0	1997	45	1069	22.57
4.0	1995	37	1089	26.29
3.0	1994	34	1107	34.63
2.1	1993	13	1137	56.16
1.2	1991	17	1132	67.90

Évolution de CPLEX

TABLE: Temps de calcul de 12 versions de CPLEX sur un ensemble de 1,734 instances de MIP. Temps normalizés avec CPLEX 11.0. Source [Lodi 2010, Achterberg et Bixby 2009]

CPLEX version	année	better	worse	temps
11.0	2007	–	–	1.00
10.0	2005	201	650	1.91
9.0	2003	142	793	2.73
8.0	2002	117	856	3.56
7.1	2001	63	930	4.59
6.5	1999	71	997	**7.47**
6.0	1998	55	1060	21.30
5.0	1997	45	1069	22.57
4.0	1995	37	1089	26.29
3.0	1994	34	1107	34.63
2.1	1993	13	1137	56.16
1.2	1991	17	1132	67.90

Coupes mixtes de Gomory

Apport de chacune des composantes

TABLE: Variation du temps de calcul avec CPLEX 8 sur un ensemble de 978 instances de MIP en enlevant chaque technique séparément [Bixby, Fenelon, Gu, Rothberg, Wunderling 2005]

Technique	Dégradation
Toutes les coupes	53,7
Coupes Gomory Mixtes	2.52
Coupes MIR	1.83
Coupes Knapsack Cover	1.40
Coupes Disjonctives (mal implémentés !)	1.02
Presolve	10.8
Heuristiques	1.4
Dived Probing	1.1

Renforcement de la relaxation continue par les coupes

TABLE: Temps de calcul et pourcentage du saut d'integrité fermé par p itérations de coupes mixtes de Gomory et p itérations de lift-and-projects, sur 60 problèmes de la MIPLIB, avec Clp[B. 2010].

	temps (sec.)	% gap closed
1 GMI round	0.00	25.17
10 GMI rounds	0.04	46.59
100 GMI rounds	0.5	53.14
1 l-a-p round	0.07	27.99
10 l-a-p rounds	1.52	57.81
50 l-a-p rounds	12.78	62.82

Le saut d'intégrité fermé est calculé comme suit. Soient z_{MIP} la valeur de l'optimum entier, z_{LP} la relaxation continue et z_R la valeur de la relaxation renforcé par les coupes. gap closed $= 100\frac{z_R - z_{MIP}}{z_{LP} - z_{MIP}}$. Eg général cette valeur est à peu près stable si on change le solveur PL mais ce n'est pas la résolution complète!

Temps total de résolution

TABLE: Temps de résolutions complètes et nombres de nœuds avec Cbc sur 60 problèmes de la MIPLIB après 10 itérations de coupes mixtes de Gomory ou coupes de lift-and-project. Les instances sont groupées par difficulté.

	10 GMI		10 l-a-p	
	temps	# nodes	temps	# nodes
Groupe A	2.98	4534.4	3.61	2446.8
Groupe B	40.9	22530.2	46.7	11146.5
Groupe C	667.8	208612.8	481.7	114358.3
Toutes	54.34	3.57e+04	44.99	2.651e+04

- Groupe A : 30 instances résolues en moins de 10 secondes avec GMI.
- Groupe B : 12 instances résolues entre 10 et 100 secondes avec GMI.
- Groupe C : 8 instances résolues en plus de 100 secondes et moins de 3 heures.
- Que faire des 10 instances non résolues ?

Fermetures élémentaires

Etant donnée une méthode de coupes, on appele fermeture élémentaire l'ensemble des coupes pouvant être obtenus en utilisant uniquement la formulation initiale du problème.
A partir des méthodes qu'on connaît, on peut définir :

- Fermeture de Chvátal-Gomory,
- Fermeture des coupes splits
- Fermeture des coupes de lift-and-project

Expérimentalement, quelle est la qualité de l'approximations donnée par ces relaxations ? (en théorie elle est mauvaise.)

Fermeture de Chvátal-Gomory.

On considère

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$$

$$S = conv\{x \in \mathbb{Z}^n_+ : Ax \leq b\} = conv(P \cap \mathbb{Z}^n)$$

Une inégalité de Chvátal-Gomory : $u^T Ax \leq \lfloor u^T b \rfloor$ où $u^T A \in \mathbb{Z}^n$.
De manière équivalente : $\lfloor u^T A \rfloor x \leq \lfloor u^T b \rfloor$ pour $u \in \mathbb{R}^m_+$.
La **fermeture de Chvátal** de P :

$$P_{CG} = P^{(1)} := \{x \geq 0 : Ax \leq b, \lfloor u^T A \rfloor x \leq \lfloor u^T b \rfloor \text{ for all } u \in \mathbb{R}^m_+\}. \qquad (1)$$

Problème de sépraration

Soit $\hat{x} \in P$ trouver une coupe CG $\alpha^T x \leq \alpha_0$ violée par $\hat{x}$, i.e., trouver $u \in \mathbb{R}^m_+$ such that $\lfloor u^T A \rfloor \hat{x} > \lfloor u^T b \rfloor$, ou montrer qu'il n'existe pas un tel u exists.

Ce problème est NP-difficile [Eisenbrand, 1999].

Modèle de séparation [Fischetti and Lodi, 2005]

$$
\begin{aligned}
\max\ & \alpha^T \hat{x} - \alpha_0 \\
& \alpha^T \leq u^T A, \ u \geq 0 \\
& \alpha_0 + 1 - \epsilon \geq u^T b \\
& \alpha, \ \alpha_0 \quad \text{integer}
\end{aligned} \tag{CG-MIP}
$$

La validité de (CG-MIP) vient du fait que $\alpha^T x \leq \alpha_0$ est une coupe CG si et seulement si :

1. (α, α_0) est entier,
2. $\alpha^T x \leq \alpha_0 + 1 - \epsilon$ est valide pour P.

Coupe de Chvátal-Gomory pour ensembles mixtes [B., Cornuéjols, Dash, Fischetti and L. 2007]

On considère maintenant :

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^n_+ \times \mathbb{R}^p_+ : Ax + Gy \leq b\}$$

et sa relaxation :

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^n_+ \times \mathbb{R}^p_+ : Ax + Gy \leq b\}$$

La **projection** de P sur l'espace des variables x est :

$$\begin{aligned} P_x &= \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \exists\, y \in \mathbb{R}^p_+ \text{ s.t. } Ax + Gy \leq b\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n_+ : u^k A \leq u^k b,\ k = 1, \ldots, K\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \bar{A}x \leq \bar{b}\} \end{aligned}$$

où $u^1, \ldots, u^K$ sont les rayons extrêmes du cône de projection $\{u \in \mathbb{R}^m_+ : u^T C \geq 0^T\}$.

Coupes Chvátal-Gomory projetées

On définit la **couope Chvátal-Gomory (pro-CG) projetée** comme une coupe CG dérivée du système $\bar{A}x \leq \bar{b}$, $x \geq 0$, i.e., une inégalité de la forme $\lfloor w^T \bar{A} \rfloor x \leq \lfloor w^T \bar{b} \rfloor$ pour $w \geq 0$.

Toute ligne de $\bar{A}x \leq \bar{b}$ peut être obtenue comme combinaison positive des lignes de $Ax \leq b$ avec des multiplicateurs $\bar{u} \geq 0$ tels que $\bar{u}^T C \geq 0^T$ $\Rightarrow$ Les coupes pro-CG sont de la forme :

$$\lfloor u^T A \rfloor x \leq \lfloor u^T b \rfloor \qquad \text{pour tout } u \geq 0 \text{ tel que } u^T C \geq 0^T. \tag{2}$$

Séparation des coupes pro-CG

Extension simple du modèle de séparation des coupes de CG.

$$\begin{aligned} \max\ & \alpha^T \hat{x} - \alpha_0 \\ & \alpha^T \leq u^T A \\ \\ & \alpha_0 + 1 - \epsilon \geq u^T b \\ & u \geq 0 \\ & \alpha \in \mathbb{Z}^n,\ \alpha_0 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Séparation des coupes pro-CG

Extension simple du modèle de séparation des coupes de CG.

$$\begin{aligned}
\max\ & \alpha^T \hat{x} - \alpha_0 \\
& \alpha^T \leq u^T A \\
& 0^T \leq u^T C \\
& \alpha_0 + 1 - \epsilon \geq u^T b \\
& u \geq 0 \\
& \alpha \in \mathbb{Z}^n,\ \alpha_0 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Fermeture élémentaire des splits, lift-and-project,...

On considère :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, p\}$$

sa relaxation continue :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

et pour tout $(\pi, \pi_0) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\pi_i = 0$, $\forall i = p+1, \ldots, n$, la relaxation split :

$$P^{(\pi,\pi_0)} = \operatorname{conv}\left(\left(P \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n : \pi^T x \leq \pi_0\right\}\right) \cup \left(P \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n : \pi^T x \geq \pi_0 + 1\right\}\right)\right)$$

Fermeture élémentaire des splits, lift-and-project,. . .

Fermeture élémentaire du lift-and-project P_e

$$P_e = \cap_{k \in \{1,\dots,p\}, k_0 \in \mathbb{Z}} P^{(e_k, k_0)}.$$

On peut séparer/optimiser en temps polynomial (intersection d'unions d'un nombre polynomial de polyèdre).

Fermeture élémentaire du lift-and-project renforcé P_{e^*}

Obtenue en reforant toutes les coupes de lift-and-project par la procédure de Balas Jeroslow. On la note P_{e^*}. La complexité de la séparation/optimisation sur P_{e^*} est ouverte.

La fermeture des splits P_{split}

$$P_{split} = \cap_{(\pi,\pi_0) \in \mathbb{Z}^{n+1} : \pi_i = 0, \forall i \in \{1,\dots,p\}} P^{(\pi,\pi_0)}.$$

et est un polyèdre [Cook, Kannan and Schrijver, 1990].
Séparer/Optimiser sur P_{split} est NP-Difficile [Caprara and Letchford 2003].

Séparation sur P_{Split}

$$
\begin{aligned}
\max\ & \alpha^T \hat{x} - \beta \\
\text{s.t.} & \\
& u^T A + u_0 \pi = \alpha \\
& v^T A - v_0 \pi = \alpha \\
& u^T b + u_0 \pi_0 \leq \beta \\
& u^T b - v_0 (\pi_0 + 1) \leq \beta \\
& u_0 + v_0 = 1 \\
& u, v \in \mathbb{R}^m_+,\ u_0, v_0 \geq 0 \\
& \pi \in \mathbb{Z}^n,\ \pi_0 \in \mathbb{Z} \\
& \pi_i = 0, i = p+1, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{CGLP}
$$

Simplifications du modèle [Balas and Saxena 2005]

On utilise $u_0 + v_0 = 1$ pour éliminer v_0 :

$$\begin{aligned}
\min\ & u^T(A\hat{x} - b) + u_0(\pi^T\hat{x} - \pi_0) \\
& u^T A - v^T A + \pi = 0 \\
& u^T b - v^T b + \pi_0 = u_0 - 1 \\
& 0 < u_0 < 1, u, v \geq 0 \\
& \pi \in \mathbb{Z}^n,\ \pi_0 \in \mathbb{Z} \\
& \pi_i = 0, i = p+1, \ldots, n
\end{aligned}$$

- Pour u_0 fixé le modèle devient un PLM (sans perte de généralité $u_0 \in (0, 1/2])$.
- Balas et Saxena propose de considérer **une liste heuristique** de valeurs pour u_0, par ex. $(0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5)$ cette liste est ensuite enrichie de nouvelles valeurs si nécessaire.

Comparaison des fermetures élémentaires

Sur 52 problèmes de MIPLIB3.

	time (sec.)	% gap closed
P_{Split}	7556	79.2
P_{CG}	440	42.81
P_e	2.27	51.21
P_{e^*}	1.39	63.89
100 GMI rounds	0.5	53.14
50 l-a-p rounds	12.78	62.82

CPLEX[1]			CPLEX+P_{e^*}		
% gap	time	# nodes	% gap	time	# nodes
55 problems solved by both in MIPLIB3+2003					
60.89	252	129387	68.74	266	104276
19 problems solved by any in more than 10 sec. or 10,000 nodes					
34.52	784	402659	44.31	829	324344
`danoint`					
2.92	8134	1,119,302	3.02	> 10800	$> 1{,}500{,}422$
`nsrand-ipx`					
50.03	> 10800	>642729	79.23	911	34756

1. gap closed by preprocessing + cuts