

Coupes disjonctives et lift-and-project

Pierre Bonami

M06 - 2010/2011

January 30, 2012

Une approche géométrique pour obtenir des coupes

On considère l'ensemble mixte

$$S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, p\}$$

Clairement, si $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$, $\nexists x \in S$ tel que $k < x_j < k + 1$.

Une approche géométrique pour obtenir des coupes

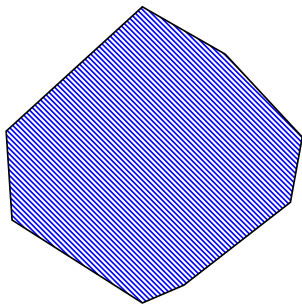
On considère l'ensemble mixte

$$S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, p\}$$

Clairement, si $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$, $\nexists x \in S$ tel que $k < x_j < k + 1$.

On peut générer des coupes de manière systématique en considérant l'enveloppe convexe de l'intersection de

$$P = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b\}$$



Une approche géométrique pour obtenir des coupes

On considère l'ensemble mixte

$$S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, p\}$$

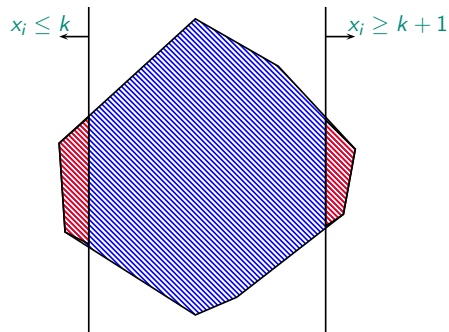
Clairement, si $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$, $\nexists x \in S$ tel que $k < x_j < k + 1$.

On peut générer des coupes de manière systématique en considérant l'enveloppe convexe de l'intersection de

$$P = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b\}$$

avec la **disjonction**

$$x_j \leq k \vee x_j \geq k + 1$$



Une approche géométrique pour obtenir des coupes

On considère l'ensemble mixte

$$S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, p\}$$

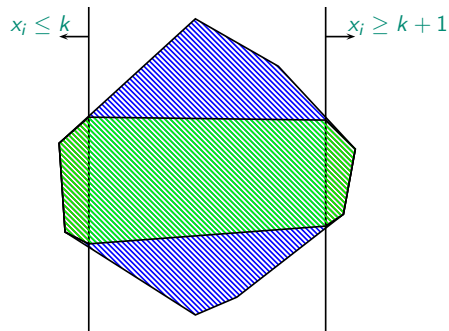
Clairement, si $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$, $\nexists x \in S$ tel que $k < x_j < k + 1$.

On peut générer des coupes de manière systématique en considérant l'enveloppe convexe de l'intersection de

$$P = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b\}$$

avec la disjonction

$$x_j \leq k \vee x_j \geq k + 1$$



Relaxation Splits

Plus généralement, on considère l'ensemble mixte

$$S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, p\}$$

et sa relaxation continue P . Soient $\pi \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\pi_j = 0$ pour $j = p + 1, \dots, n$ et $\pi_0 \in \mathbb{Z}$. $\forall x \in S, \pi_0 < \pi^T x < \pi_0 + 1$.

On appelle **relaxation split** l'ensemble $P^{(\pi, \pi_0)}(P) :=$

$$\text{conv} \left(\left(P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \pi^T x \leq \pi_0\} \right) \cup \left(P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \pi^T x \geq \pi_0 + 1\} \right) \right)$$

Proposition

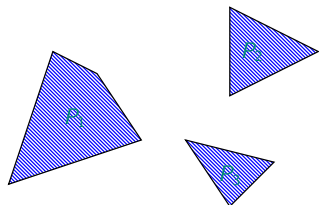
$$S \subseteq P^{(\pi, \pi_0)} \subseteq P$$

Les inégalités valides pour une relaxation $P^{(\pi, \pi_0)}$ sont appelées coupes splits [Cook, Kannan and Schrijver, 1990].

Unions de polyèdres

Etant donnés k polyèdres P_1, \dots, P_k , nous voulons caractériser

$$\text{conv} \left(\bigcup_{i=1}^k P_i \right)$$

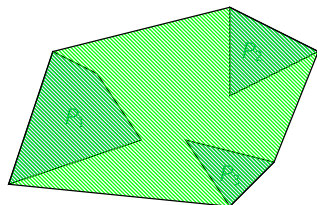


Pour caractériser cet ensemble, on va avoir besoin d'une nouvelle caractérisation des polyèdres.

Unions de polyèdres

Etant donnés k polyèdres P_1, \dots, P_k , nous voulons caractériser

$$\text{conv} \left(\bigcup_{i=1}^k P_i \right)$$



$$\text{conv}(P_1 \cup P_2 \cup P_3)$$

Pour caractériser cet ensemble, on va avoir besoin d'une nouvelle caractérisation des polyèdres.

Part I

Théorème de Minkowsky-Weil

Cônes

- ▶ Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est un **cone à générateurs finis** si

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^k \mu_i r^i, \mu_i \geq 0 \right\}$$

(où $r^1, \dots, r^k \in \mathbb{R}^n$ et k fini).

- ▶ On note $C = \text{cone}(r^1, \dots, r^k) = \text{cone}(R)$, où $R = (r^1 \ r^2 \ \dots \ r^k)$.
- ▶ $C \subset \mathbb{R}^n$ est un **cone polyédral** si il existe une matrice A telle que $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq 0\}$.

Théorème de Minkowsky-Weil (pour les cônes)

C est un cone à générateurs finis si et seulement si C est un cone polyédral.

Preuve du théorème

(\Rightarrow) En appliquant l'élimination de Fourier à

$C = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^k \mu_i r^i, \mu_i \geq 0\}$ pour supprimer les variables μ_i , on obtient un cône polyédral.

(\Leftarrow) On va montrer que ceci se déduit de (\Rightarrow) en montrant le résultat suivant:

Claim

Si deux matrices A et R sont telles que

$$\{x : Ax \geq 0\} = \{x : x = R\mu, \mu \geq 0\}$$

alors

$$\{y : y = A^t \nu, \nu \geq 0\} = \{y : R^T y \geq 0\}$$

Preuve du claim

Soient A et R telles que $\{x : Ax \geq 0\} = \{x : x = R\mu, \mu \geq 0\}$.

Par le lemme de Farkas

$$\{x : x = R\mu, \mu \geq 0\} = \{x : x^T y \geq 0 \text{ pour tout } y \text{ tel que } R^T y \geq 0\}.$$

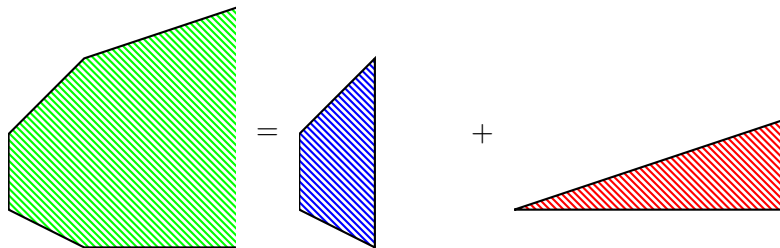
- ▶ $\{y : R^T y \geq 0\} \subseteq \{y : y = A^t \nu, \nu \geq 0\}$. En effet, soit \bar{y} t.q. $R^T \bar{y} \geq 0$. Pour tout x t.q. $Ax \geq 0$ on a $x^T \bar{y} \geq 0$ et par Farkas $\exists \nu \geq 0$ tel que $\bar{y} = A^T \nu$.
- ▶ $\{y : y = A^t \nu, \nu \geq 0\} = \{y : R^T y \geq 0\}$. Soit \bar{y} tel que $y = A^t \nu, \nu \geq 0$. On a $R^T y = R^T A^T \nu$. Or comme $Ar^j \geq 0$, $AR \geq 0$ et donc $\nu \geq 0 \Rightarrow R^T A^T \nu \geq 0$.

Théorème de Minkowsky-Weil (polyèdres)

Théorème

$P := \{x \in \mathbb{R}^n\}$ est un polyèdre si et seulement si, il existe v^1, \dots, v^p et $r^1, \dots, r^q \in \mathbb{R}^n$ tels que:

$$\begin{aligned} P &= \text{conv}(v^1, \dots, v^p) + \text{cone}(r^1, \dots, r^q) \\ &= \{x : \exists \bar{v} \in \text{conv}(v^1, \dots, v^p), \bar{r} \in \text{cone}(r^1, \dots, r^q), \text{ et } x = \bar{v} + \bar{r}\} \end{aligned}$$

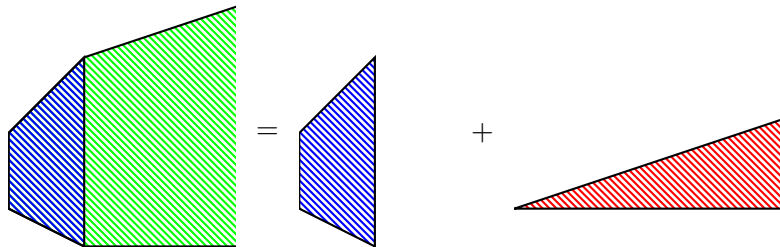


Théorème de Minkowsky-Weil (polyèdres)

Théorème

$P := \{x \in \mathbb{R}^n\}$ est un polyèdre si et seulement si, il existe v^1, \dots, v^p et $r^1, \dots, r^q \in \mathbb{R}^n$ tels que:

$$\begin{aligned} P &= \text{conv}(v^1, \dots, v^p) + \text{cone}(r^1, \dots, r^q) \\ &= \{x : \exists \bar{v} \in \text{conv}(v^1, \dots, v^p), \bar{r} \in \text{cone}(r^1, \dots, r^q), \text{ et } x = \bar{v} + \bar{r}\} \end{aligned}$$



Preuve du Théorème

On considère le cône $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : by - Ax \geq 0, y \geq 0\}$.
Par le théorème précédent C a un nombre fini de générateurs

$$\begin{pmatrix} \tilde{r}^1 \\ \tilde{\mu}^1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \tilde{r}^{p+q} \\ \tilde{\mu}^{p+q} \end{pmatrix}.$$

On suppose que $\tilde{\mu}^i > 0$ pour $i = 1, \dots, p$, et $\tilde{\mu}^i = 0$ pour $i = p+1, \dots, p+q$.

C est aussi généré par

$$\begin{pmatrix} \tilde{r}^1/\tilde{\mu}^1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \tilde{r}^p/\tilde{\mu}^p \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{r}^{p+1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \tilde{r}^{p+q} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comm $P = C \cap \{y = 1\}$ il en suit le résultat:

$$P = \text{conv}(\tilde{r}^1/\tilde{\mu}^1, \dots, \tilde{r}^p/\tilde{\mu}^p) + \text{cone}(\tilde{r}^{p+1}, \dots, \tilde{r}^{p+q})$$

(le résultat inverse suit directement de Fourier)

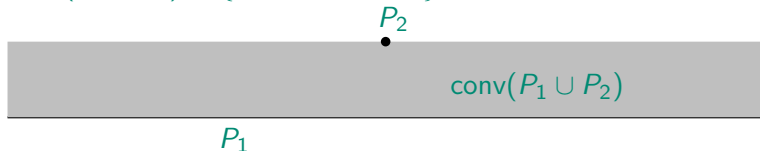
Part II

Unions de polyèdres

Union de polyèdres

Remark

$\text{conv}(\cup_{i=1}^k P_i)$ peut ne pas être fermé: let $P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$
 $P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 1, x_2 = 1\}$ alors
 $\text{conv}(P_1 \cup P_2) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 1\} \cup P_2$.



Theorème: Union de polyèdres

Soient $P_i = Q_i + C_i$, pour $i = 1, \dots, k$, des polyèdres non vides.
Alors $Q = \text{conv}(\cup_{i=1}^k Q_i)$ est un polytope, $C = \text{cone}(\cup_{i=1}^k C_i)$ est un cône polyédral et

$$\text{clconv}(\cup_{i=1}^k P_i) = Q + C$$

Preuve (néglige le cas $\bigcup_{i=1}^k P_i = \emptyset$)

(i) $Q_i = \text{conv}(V_i)$ donc $Q = \text{conv}(\bigcup_{i=1}^k V_i)$ est un polytope.

(ii) $C_i = \text{cone}(R_i)$ donc $C = \text{cone}(\bigcup_{i=1}^k R_i)$ est un cône polyédral.

(iii) pour montrer: $\text{clconv}(\bigcup_{i=1}^k P_i) \subseteq Q + C$,

$\text{conv}(\bigcup_{i=1}^k P_i) \subseteq Q + C$ est suffisant.

Soit $x \in \text{conv}(\bigcup_{i=1}^k P_i)$:

$$x = \sum_{i=1}^k y_i z^i \text{ avec } y_i \geq 0, \sum_{i=1}^k y_i = 1 \text{ et } z^i \in P^i.$$

Alors $z^i = w^i + r^i$ avec $w^i \in Q_i$ et $r^i \in C_i$. Donc

$$x = \sum_{i=1}^k y_i w^i + \sum_{i=1}^k y_i r^i \in Q + C.$$

Preuve (II)

(iv) $Q + C \subseteq \text{clconv}(\cup_{i=1}^k P_i)$.

Soit $x \in Q + C$. Alors:

$$x = \sum_{i=1}^k y_i w^i + \sum_{i=1}^k r^i, \text{ avec } w^i \in Q^i, y_i \geq 0, x^i \in C_i \text{ et } \sum_{i=1}^k y_i = 1.$$

Soit $I = \{i : y_i > 0\}$.

Définissons :

$$x^\epsilon = \sum_{i \in I} \left(y_i - \epsilon \frac{k}{|I|} \right) w^i + \sum_{i=1}^k \epsilon \left(w^i + \frac{1}{\epsilon} r^i \right)$$

Pour $\epsilon > 0$ petit $\epsilon \frac{k}{|I|} \geq 0$ et $x^\epsilon \in \text{conv}(\cup_{i=1}^k P_i)$. De plus $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x^\epsilon = x$.



Théorème de Balas

Soient $P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : A_i x \leq b_i\}, i = 1, \dots, k$, des polyèdres:

$$\text{proj}_x(Y) = Q + C$$

avec

$$Y = \begin{cases} A_i x^i \leq b_i y_i & \text{pour } i = 1, \dots, k \\ \sum_{i=1}^k x^i = x \\ \sum_{i=1}^k y_i = 1 \\ y_i \geq 0 & \text{pour } i = 1, \dots, k \end{cases}$$

De plus, si $\cup P_i = \emptyset$ ou $C_j \subseteq \text{conv}(\cup_{i:P_i \neq \emptyset} C_i)$:

$$\text{proj}_x(Y) = \text{clconv}(\cup_{i=1}^k P_i)$$

Preuve (néglige le cas \emptyset)

(i) $\text{proj}_x(Y) \subseteq Q + C$.

Soit $(x, x^1, y_1, \dots, x^k, y_k) \in Y$. Pour i tel que $y_i > 0$ $\frac{x^i}{y_i} \in P_i$.

Pour i tel que $y_i = 0$, $x^i \in C_i$.

(ii) $Q + C \subseteq \text{proj}_x(Y)$

Soit $x \in Q + C$.

$$x = \sum_{i=1}^k y_i z^i + \sum_{i=1}^k r^i \text{ avec } y_i \geq 0, \sum_{i=1}^k y_i = 1, z^i \in Q^i \text{ et } r^i \in C_i.$$

Pour i tel que $y^i > 0$, soit $x^i = y^i z^i + r^i$. Pour i tel que $y^i = 0$, soit $x^i = r^i$. On peut vérifier que $(x, x^1, y_1, \dots, x^k, y_k) \in Y$. \square

Part III

Coupes lift-and-project

Séparation de coupes disjonctives

Soit

$$P_{Dsj} = \text{clconv}(\cup_{i=1}^k P_i).$$

Problème de séparation

Étant donné $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\alpha^T x \leq \beta$ est valide pour P_{Dsj} et $\alpha^T \hat{x} > \beta$ ou montrer que $\hat{x} \in P_{Dsj}$.

Trouver une solution de:

$$A_i x^i \leq b_i y_i \text{ for } i = 1, \dots, k$$

$$\sum_{i=1}^k x^i = \hat{x}$$

$$\sum_{i=1}^k y_i = 1$$

$$y_i \geq 0 \text{ for } i = 1, \dots, k$$

Par le Lemme de Farkas, ce système n'a pas de solution si et seulement si:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}, \\ u^1, \dots, u^k \in \mathbb{R}_+^m \text{ tel que:}$$

$$u^i{}^T A^i = \alpha \quad i = 1, \dots, k$$

$$u^i{}^T b \leq \beta \quad i = 1, \dots, k$$

$$\alpha^T \hat{x} > \beta$$

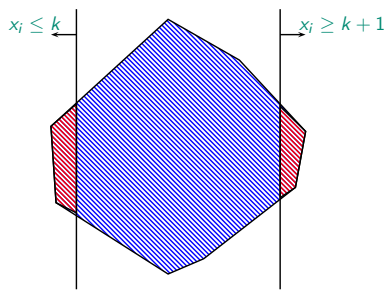
Relaxation Splits

$$S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, p\}.$$

Relaxation continue P , $\pi \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\pi_j = 0$ pour $j = p + 1, \dots, n$ et $\pi_0 \in \mathbb{Z}$.

Relaxation split

$$P^{(\pi, \pi_0)}(P) := \text{conv} \left(\left(P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \pi^T x \leq \pi_0\} \right) \cup \left(P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \pi^T x \geq \pi_0 + 1\} \right) \right)$$



Problème de séparation

Se réduit maintenant à résoudre un programme linéaire.

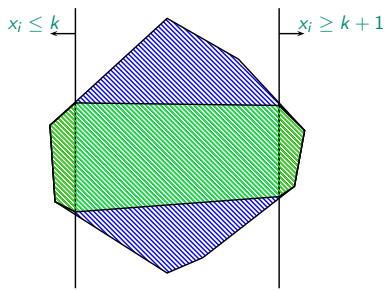
Relaxation Splits

$$S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, p\}.$$

Relaxation continue P , $\pi \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\pi_j = 0$ pour $j = p + 1, \dots, n$ et $\pi_0 \in \mathbb{Z}$.

Relaxation split

$$P^{(\pi, \pi_0)}(P) := \text{conv} \left(\left(P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \pi^T x \leq \pi_0\} \right) \cup \left(P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \pi^T x \geq \pi_0 + 1\} \right) \right)$$



Problème de séparation

Se réduit maintenant à résoudre un programme linéaire.

Separation des coupes Splits

$$P^{(\pi, \pi_0)}(P) = \text{conv} \left(\left(P \cap \left\{ \pi^T x \leq \pi_0 \right\} \right) \cup \left(P \cap \left\{ \pi^T x \geq \pi_0 + 1 \right\} \right) \right)$$

Proposition [Balas 73]

Soit $\hat{x} \in P$, $x \in P^{(\pi, \pi_0)}$ si et seulement si l'optimum du programme linéaire

$$\max \alpha^T \hat{x} - \beta$$

s.t.

$$u^T A + u_0 \pi \geq \alpha \qquad v^T A - v_0 \pi \geq \alpha \qquad (\text{CGLP})$$

$$u^T b + u_0 \pi_0 \leq \beta \qquad v^T b - v_0 (\pi_0 + 1) \leq \beta$$

$$u, v \in \mathbb{R}_+^m, u_0, v_0 \geq 0$$

est positif.

“Cut Generation LP”

- ▶ Si \hat{x} est un point extrême P et $\pi_0 < \pi^T \hat{x} < \pi_0 + 1$, coupe toujours.
- ▶ Si positif, non borné.
- ▶ On impose une contrainte de **normalization** pour borner le problème:
 1. $u_0 + v_0 = 1$ (coupe de Gomory Mixte),
 2. $\sum_{i=1}^m (u_i + v_i) + u_0 + v_0 = 1$
- ▶ Si $\pi = e_j$: lift-and-project cut [Balas Ceria Cornuejols 93]. Ces inégalités donnent un algorithme fini pour la programmation 0 – 1 : **Convexification séquentielle**.
- ▶ Le CGLP peut en fait être résolu sans le formuler dans l'espace de dimension supérieur [Balas Perregaard 2003].

Renforcement monoïdal [Balas Jeroslow 80]

Soit $(\alpha, \beta, u, v, u_0, v_0)$ une solution de (CGLP) avec $u_0 > 0$ and $v_0 > 0$. Soit $\hat{m}_i = \frac{v^T A^i - u^T A^i}{u_0 + v_0}$ et

$$\tilde{\alpha}_i = \begin{cases} \max\{u^T A^i + u_0 \lceil \hat{m}_i \rceil, v^T A^i - v_0 \lfloor \hat{m}_i \rfloor\} & \text{si } i \in I \\ \min\{u^T A^i, v^T A^i\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve

Pour tout $m \in \mathbb{Z}^n$ tel que $m_i = 0$ for $i \notin I$ et $m_i \in \mathbb{Z}$ for $i \in I$, on considère la disjonction split:

$$\left(\pi^T x + m^T x \leq \pi_0 \right) \vee \left(\pi^T x + m^T x \geq \pi_0 \right)$$

Pour u, v, u_0, v_0 fixés on peut trouver m donnant les meilleurs coefficients pour $i \in I$:

$$\tilde{\alpha}_i = \max_{m_j \in \mathbb{Z}} \{ \min\{u^T A^i + u_0 m_i, v^T A^i - v_0 m_i\} \}$$

Convexification séquentielle

Théorème

Soit

$$S = \{x \in \{0, 1\}^p \times \mathbb{R}_+^{n-p} : Ax \leq b\}.$$

$$\text{conv}(S) = P^{(e_p, 0)} \left(P^{(e_{p-1}, 0)} \left(\dots \left(P^{(e_1, 0)} \right) \dots \right) \right).$$

Lemme

Soit $F := \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = d\}$ tel que $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq d\}$,
 $\text{conv}(S) \cap F = \text{conv}(S \cap F)$

preuve

(i) $\text{conv}(S \cap F) \subseteq \text{conv}(S)$ et $\text{conv}(S \cap F) \subseteq F \Rightarrow$

$\text{conv}(S \cap F) \subseteq \text{conv}(S) \cap F$

(ii) Soit $x \in \text{conv}(S) \cap F$, $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$, où $x^i \in S$, $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. $d = c^T x = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x^i \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i d = d$. Donc $c^T x^i = d$ pour $i = 1, \dots, k$.



Preuve du théorème (par récurrence)

Soit $S_t := \{x \in \{0, 1\}^t \times [0, 1]^{t-p} \times \mathbb{R}_+^{n-p} : Ax \leq b\}$. On veut montrer $\text{conv}(S_t) = P^{(e_t, 0)} (P^{(e_{t-1}, 0)} (\dots (P^{(e_1, 0)} \dots)))$. Par définition c'est vrai pour $t = 1$. On suppose vrai pour $t - 1$. Par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} P^{(e_t, 0)} \left(P^{(e_{t-1}, 0)} \left(\dots \left(P^{(e_1, 0)} \right) \dots \right) \right) &= P^{(e_t, 0)} (\text{conv}(S_{t-1})) \\ &= \text{conv} \left((\text{conv}(S_{t-1}) \cap \{x_t = 0\}) \cup (\text{conv}(S_{t-1}) \cap \{x_t = 1\}) \right). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme

$\text{conv}(S_{t-1}) \cap \{x_t = 0\} = \text{conv}(S_{t-1} \cap \{x_t = 0\})$, et
 $\text{conv}(S_{t-1}) \cap \{x_t = 1\} = \text{conv}(S_{t-1} \cap \{x_t = 1\})$. Le théorème suit.

