Initiation à la sémantique (2)

Solange Coupet-Grimal

April 1, 2010

Syntaxe

Types : s, t, ...
Termes : M, N, P ...
Variables des termes: x, y, ... f, g, ...

Les types `t::= nat | bool | s→t`

Les termes `M::= 0 | true | false |(succ M)|(pred M)`
`(zero? M )| if M then N else P |`
`x |` $\lambda x_{:t}$`. M | (M N) |` $\mu f_{:t}.M$

$$\boxed{\mu f_{:t}.\, M \quad \sim \quad let\ rec\ f = M}$$

Syntaxe

Types : s, t, …
Termes : M, N, P …
Variables des termes: x, y, … f, g, …

Les types `t::= nat | bool | s→t`

Les termes `M::= 0|true|false|(succ M)|(pred M)`
`(zero? M )| if M then N else P |`
`x |` $\lambda x_{:t}$ `. M| (M N) |` $\mu f_{:t}.M$

$$\boxed{\mu f_{:t}.\,M \quad \sim \quad let\ rec\ f = M}$$

$\mu \mathtt{f}_{:\mathtt{nat}\rightarrow\mathtt{nat}}.\,(\lambda \mathtt{n}_{:\mathtt{nat}}.\,\mathtt{if}\,(\mathtt{zero?}\,\mathtt{n})\,\mathtt{then}\,\mathtt{succ}\,0\,\mathtt{else}\,(\mathtt{g_m}\,\mathtt{n}\,(\mathtt{f}\,(\mathtt{pred}\,\mathtt{n}))))$

Syntaxe

Notations

$$\boxed{\underline{\mathtt{n}} = \underbrace{(succ\ \ldots(succ}_{n\ fois}\,0))}$$

$$\mu \mathtt{f}_{:\mathtt{nat}\to\mathtt{nat}}.\,(\lambda \mathtt{n}_{:\mathtt{nat}}.\,\mathtt{if}(\mathtt{zero?}\,\mathtt{n})\,\mathtt{then}\,\underline{\mathtt{1}}\,\mathtt{else}\,(\mathtt{g_m}\,\mathtt{n}\,(\mathtt{f}\,(\mathtt{pred}\,\mathtt{n}))))$$

Règles de typage

Les 3 règles de typage de $\lambda^{\rightarrow}$

- $H \cup \{x : t\} \vdash x : t$ (1) *projection*
- $$\frac{H \vdash M : s \rightarrow t \quad H \vdash N : s}{H \vdash (M\,N) \;:\; t}$$ (2) *application*
- $$\frac{H \cup \{x : s\} \vdash M : t}{H \vdash \lambda x_{:s}.M \;:\; s \rightarrow t}$$ (3) *abstraction*

Règles de typage

Les types `bool` et `nat`

$$\vdash 0 : nat \qquad \vdash false : bool \qquad \vdash true : bool$$

$$\frac{H \vdash M : nat}{H \vdash (succ\ M)\ :\ nat} \qquad \frac{H \vdash M : nat}{H \vdash (pred\ M)\ :\ nat}$$

$$\frac{H \vdash M : nat}{H \vdash (zero?\ M) :\ bool} \qquad \frac{H \vdash B : bool \quad H \vdash M : t \quad H \vdash N : t}{H \vdash if\ B\ then\ M\ else\ N : t}$$

Règles de typage

L'opérateur de point fixe μ

$$\boxed{\dfrac{H \cup \{f : t\} \vdash M : t}{H \vdash \mu f_{:t}.M : t}}$$

Règles équationnelles

Toutes les règles équationnelles de $\lambda^{\rightarrow}$

et les règles de congruence comme

$$\frac{H \triangleright M = M' := bool \qquad H \triangleright N = N' : t \qquad H \triangleright P \;=\; P' : t}{H \;\triangleright\; if\;\; M\; then\; N\; else\; P = if\;\; M'\; then\; N'\; else\; P' \;:\; t}$$

Règles équationnelles

Les types `bool` et `nat`

$H \triangleright pred\, 0 = 0 : nat$ (pr0) $\quad H \triangleright pred\, (succ\, \underline{n}) = \underline{n} : nat$ (prS)

$H \triangleright zero?0 = true : bool$ (z0) $\quad H \triangleright zero?(succ\, n) = false : bool$ (zS)

$$\frac{H \vdash M : t \quad H \vdash N : t}{H \triangleright if\ \ true\ \ then\ M\ \ else\ N = M : t} \quad \text{(IfTrue)}$$

$$\frac{H \vdash M : t \quad H \vdash N : t}{H \triangleright if\ \ false\ \ then\ M\ \ else\ N = N : t} \quad \text{(IfFalse)}$$

Règles équationnelles

La règle μ: étude d'un exemple

Dépliage : $\mathit{Fact} \quad \rightsquigarrow \lambda n.\, \mathit{if}\ n = 0\ \mathit{then}\ \underline{1}\ \mathit{else}\ n * (\mathit{Fact})\ (n-1)$

$\mathit{Mult} : \mathit{nat} \rightarrow \mathit{nat}$ un terme supposé connu et

$\mu\mathtt{f}_{:\mathtt{nat}\rightarrow\mathtt{nat}}.\mathtt{M}$ (cf. let rec f = M)

$$M = \lambda n_{:nat}.\, \mathit{if}\ (\mathit{zero?}\ n)\quad \mathit{then}\, \underline{1}$$
$$\mathit{else}\ (\mathit{Mult}\ n)\ (f\ (\mathit{pred}\ n))))$$

$\mu f.M \qquad M \equiv \lambda n.\, \mathit{if}\ n = 0\ \mathit{then}\ \underline{1}\ \mathit{else}\ n * (f\ (n-1))$

$$M[f := \mu f.M] \equiv \lambda n.\, \mathit{if}(\mathit{zero?}\ n)\ \mathit{then}\ \underline{1}\ \mathit{else}\ n * (\mu f.M)\ (n-1)$$

$$\mu f.M \quad \rightsquigarrow \quad M[f := \mu f.M]$$

Règles équationnelles

La règle μ

$$\boxed{\frac{H \cup \{f : t\} \vdash M : t}{H \;\triangleright\; \mu f_{:t}.M = M[f := \mu f_{:t}.M] : t} \quad (\mu)}$$

Exemple de dérivation d'une équation

$M \equiv \mu moins.\lambda n.\lambda m.if\ (zero?\ m)\ then\ n\ else\ (moins\ (pred\ n)\ (pred\ m))$

$M\ \underline{2}\ \underline{1} \stackrel{\mu}{=} (\lambda n.\lambda m.if\ (zero?m)\ then\ n\ else\ M\ (pred\ n)\ (pred\ m))\ \underline{2}\ \underline{1}$

$\stackrel{\beta}{=}\ if\ (zero?\ \underline{1})\ then\ \underline{2}\ else\ M\ (pred\ \underline{2})\ (pred\ \underline{1}) \stackrel{zS}{=}$

$if\ false\ then\ \underline{2}\ else\ M\ (pred\ \underline{2})\ (pred\ \underline{1}) \stackrel{IfFalse}{=}$

$M\ (pred\ \underline{2})\ (pred\ \underline{1}) \stackrel{PrecSucc}{=} M\ \underline{1}\ 0 \stackrel{\mu}{=}$

$(\lambda n.\lambda m.if\ (zero?\ m)\ then\ n\ else\ M\ (pred\ n)\ (pred\ m))\ \underline{1}\ 0 \stackrel{\beta}{=}$

$if\ (zero?\ 0)\ then\ \underline{1}\ else\ M\ (pred\ \underline{1})\ (pred\ 0) \stackrel{z0}{=}$

$if\ true\ then\ \underline{1}\ else\ M\ (pred\ \underline{1})\ (pred\ 0) \stackrel{IfTrue}{=} \underline{1}$

Interprétation des types

$$[\![nat]\!] = \mathbb{N}_\perp$$

$$[\![bool]\!] = \{T, F\}_\perp$$

$$[\![s \rightarrow t]\!] = [[\![s]\!] \rightarrow [\![t]\!]]$$

Interprétation des jugements de type

Les 3 règles de $\lambda^{\rightarrow}$

pour les variables, les applications , les abstractions.

$$[\![H \vdash 0 : nat]\!]_\rho = 0$$

$$[\![H \vdash true : bool]\!]_\rho = T \qquad [\![H \vdash false : bool]\!]_\rho = F$$

$$x = [\![H \vdash M : bool]\!]_\rho$$

$$[\![H \vdash if\ M\ then\ N\ else\ L : t]\!]_\rho = \begin{array}{ll} [\![H \vdash N : t]\!]_\rho & si\ x = T \\ [\![H \vdash L : t]\!]_\rho & si\ x = F \\ \perp & si\ x = \perp \end{array}$$

$$x = [\![H \vdash M : nat]\!]_\rho$$

$$[\![H \vdash (succ\ M) : nat]\!]_\rho = \begin{array}{ll} 1 + x & \\ \bot & si\ x = \bot \end{array}$$

$$[\![H \vdash (pred\ M) : nat]\!]_\rho = \begin{array}{ll} x - 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ \bot & si\ x = \bot \end{array}$$

$$[\![H \vdash zero?\ M : bool]\!]_\rho = \begin{array}{ll} \mathrm{T} & si\ x = 0 \\ \mathrm{F} & si\ x \neq 0\ et\ x \neq \bot \\ \bot & si\ x = \bot \end{array}$$

Cas de la récursion

$$\boxed{[\![H \vdash \mu f_{:t}.M : t]\!]_{\rho} = fix(sF)}$$

$$\begin{array}{lcl} sF : [\![\, t \,]\!] & \rightarrow & [\![\, t \,]\!] \\ d & & [\![H \cup \{f : t\} \vdash M : t]\!]_{\rho[f \rightarrow d]} \end{array}$$