Les données d'une table peuvent être soumises aux contraintes fonctionnelles appelées les dépendances fonctionnelles.

Dans la suite les notions de bases sont définies sur un univers U. Cependant, la généralisation de ces notions sur un schéma de relation $R \subseteq U$ est directe.

Definition 1 *Une dépendance fonctionnelle (DF) sur U est une expression de la forme $X \rightarrow Y$, où $X, Y \subseteq U$.*

Une relation u sur U satisfait une DF $f = X \rightarrow Y$, notée $u \models f$, si pour tous n-uplets t_1, t_2 dans u,

$$t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y].$$

Cas particuliers:

– Pour tout X, $u \models X \rightarrow \emptyset$.

– Si $X = \emptyset$ et $Y \neq \emptyset$, alors $u \models \emptyset \rightarrow Y$ ssi $\forall t_1, t_2 \in u, t_1[Y] = t_2[Y]$.

EXEMPLE 1 *Considérons $U = \{A, B, C\}$ et une relation u dans la figure 1.*

u:	A	B	C
	a	b	c
	a'	b	c
	a	b'	c'

Figure 1:

D'abord, $u \models X \rightarrow Y$, pour tout $Y \subseteq X$. Ensuite, on peut vérifier que $u \models AB \rightarrow C$, $u \models AC \rightarrow B$, $u \models C \rightarrow B$, $u \models B \rightarrow C$.

Mais $u \not\models A \rightarrow B$, $u \not\models BC \rightarrow A$, $u \not\models C \rightarrow A$.

Definition 2 *Soit F un ensemble de DFs définies sur U. Une relation u sur U est dite satisfaite F, notée $u \models F$, ssi $u \models f, \forall f \in F$.*

On définit $Sat(F) = \{u/U \mid u \models F\}$.

Definition 3 (Implication sématique) *Soit F un ensemble de DFs définies sur U, et f une DF sur U. On dit que F sémantiquement implique f, notée $F \models f$, ssi $\forall u$ sur U, $u \models F \Rightarrow u \models f$.*
Soit G un ensemble de DFs définies sur U, $F \models G$, ssi $\forall g \in G$ sur U, $F \models g$.

On peut facilement prouver les propriétés suivantes:

1 $F \models X \to \emptyset$.

2 $\{X \to Y\} \models XZ \to YZ$ (Augmentation).

3 $\{X \to Y, Y \to Z\} \models X \to Z$ (Transitivité).

4 $\{X \to Y, X \to Z\} \models X \to YZ$ (Addition).

5 $\{X \to YZ\} \models \{X \to Y, X \to Z\}$ (Décomposition).

6 $\{X \to Y, YZ \to W\} \models XZ \to W$ (Pseudo-transitivité)

0.1 Derivation syntaxique

Definition 4 (Système d'Armstrong) *Le système d'Armstrong est un système de dérivation formelle avec un axiome et deux règles de dérivations.*
Axiome: $\vdash X \to Y, \forall Y \subseteq X$.
Règle d'augmentation: $\{X \to Y\} \vdash XZ \to YZ$.
Règle de transitivité: $\{X \to Y, Y \to Z\} \vdash X \to Z$.

On dit qu'un ensemble F de DFs dérive une DF f, noté $F \vdash f$, s'il existe une suite de DFs $f_1, ..., f_n$ telles que

- $f_n = f$, et
- $\forall i, 1 \leq i \leq n, f_i \in F$ ou f_i est dérivée de $\{f_1, ..., f_{i-1}\}$ en utilisant le système d'Armstrong. La suite $f_1, ..., f_n$ est appelée une dérivation de f à partir de F.

EXEMPLE 2 *Soit* $F = \{A \to B, BC \to DE\}$. *Montrer que* $F \vdash AC \to E$. *En effet,*

- *Soit* $f_1 = A \to B$. *Par augmentation avec* C, $f_1 \vdash f_2 = AC \to BC$.
- *Soit* $f_3 = BC \to DE$. *Par transitivité* $\{f_2, f_3\} \vdash f_4 = AC \to DE$.
- *Par axiome* $\vdash f_5 = DE \to E$.
- *Par transitivité,* $\{f_4, f_5\} \vdash f_6 = AC \to E$.

Donc, $F \vdash AC \to E$ *par la dérivation* f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 *et* f_6.

Definition 5 (Les Fermetures) *On définit deux notions de fermetures:*

- *Soit* F *un ensemble de DFs. La fermeture de* F, *notée* F^+, *est définie par*

$$F^+ = \{f \mid F \vdash f\}.$$

- *Soit* $X \subseteq U$. *La fermeture de* X *par rapport à* F, *notée* X_F^+ *ou* X^+ *si* F *est bien entendu, est un ensemble maximal (dans le sens d'inclusion)* $Y \subseteq U$ *tel que* $X \to Y \in F^+$, *autrement dit* $F \vdash X \to Y$.

EXEMPLE 3 *Soit* $U = ABCDE$, *et* $F = \{A \to B, BC \to DE\}$. *Alors*
$F^+ = F \cup Triviales \cup \{AC \to BC, AC \to DE, AC \to E, AC \to D, BC \to D, BC \to E, ...\}$.
Soit $X = AC$. *Alors* $X_F^+ = ABCDE$. *En effet,* $A \to B \vdash AC \to BC$ *(augmentation), ensuite* $BC \to DE \vdash BC \to BCDE$ *(augmentation), et par transitivité* $AC \to BC, BC \to BCDE \vdash AC \to BCDE$, *en fin par augmentation,* $AC \to BCDE \vdash AC \to ABCDE$. *Comme* $U = ABCDE$, $Y = ABCDE$ *est le schéma maximal tel que* $AC \to Y \in F^+$, *donc* $X_F^+ = ABCDE$.

Remarque: Le nombre de DFs dans la fermeture d'un ensemble F de DFs peut être exponentiel par rapport au nombre d'attributs figurés dans les DFs.

Théorème 1

$$X \to Y \in F^+ \Leftrightarrow Y \subseteq X^+$$

Le système de dérivation d'Armstrong est correct et complète, vis à vis de déductions sémantiques.

Théorème 2

$$F \vdash X \to Y \Leftrightarrow F \models X \to Y$$

Calcul de fermeture d'un schéma de relation

Algorithme Ferme

Entrée: L'univers U, un schéma $X \subseteq U$, et un ensemble F de DFs.

Sortie: La fermeture X_F^+.

Méthode:

Début

$Res := X$;

Répéter

$Unchange := true$;

Pour chaque DF $Y \to Z \in F$ faire

    Si $Y \subseteq Res$ and $Z \not\subseteq Res$ alors

        début $Res := Res \cup Z; Unchange := false$ fin

Jusqu'à ce que $Res = U$ ou Unchange;

Retourne Res;

Fin.

La complexité de l'algorithme Ferme est $O(\mid F \mid \times \mid U \mid)$.

Théorème 3 *L'algorithme Ferme est correct:* $Res = X_F^+$.

Definition 6 (Clé.) *Soit F un ensemble de DFs définies sur l'univers U. Un schéma de relation $K \subseteq U$ est une clé de U, par rapport à F si*

- *$K_F^+ = U$, et*

- *s'il n'existe pas K' strictement inclus dans K telle que $K'^+_F = U$.*

Si K satisfait seulement la première condition de la définition 6, alors K est dit une sur-clé de U. Lorsque F est bien entendus, on peut dire simplement que K est une clé de U.

Un attribut qui appartient à une clé est appelé un attribut premier.

EXEMPLE 4 *Soit $U = ABCDE$, et $F = \{A \to B, BC \to DE\}$. On a AC est une clé de U par rapport à F. En effet, dans l'exemple 3, on a montré que $AC_F^+ = U$. Pour les sous-ensembles stricts de AC, on a $A_F^+ = AB \neq U$ et $C_F^+ = C \neq U$. D'ailleurs, AC est l'unique clé de U, car toute sur-clé K de U doit contenir AC, qui est une clé. Donc, K n'est pas une clé de U.*

0.2 Couverture Minimale

Definition 7 (Réductions.) *Soit F un ensemble de DFs.*

- *Une DF $X \to Y$ est réduite à droite si Y est un singleton.*

- *Une DF $X \to Y$ est réduite à gauche s'il n'existe pas X' strictement inclus dans X tel que $F \vdash X' \to Y$.*

- *F est redondant s'il existe $f \in F$ telle que $F - \{f\} \vdash f$.*

- *F est réduit si F n'est pas redondant et pour toute $f \in F$, f est reduite à gauche et à droite.*

EXEMPLE 5 *Soit $F = \{AB \to C, B \to A, A \to D, D \to C\}$. Les DFs de F sont réduites à droite, mais non réduites à gauche. En effet, $AB \to C \in F$, et*

$$F \vdash B \to C.$$

D'ailleurs, F est aussi redondant, car

$$F - \{AB \to C\} = \{B \to A, A \to D, D \to C\} \vdash AB \to C.$$

Definition 8 (Couverture Minimale) *Soit F un ensemble de DFs. Une couverture minimale de F est un ensemble G de DFs telque G est réduit et $G \equiv F$.*

Algorithme Couverture-Minimale

Entrée: un ensemble F de DFs.

Sortie: Une couverture minimale de F.

Méthode:

Début

1. Soit F_1 l'ensemble de DFs obtenues par le remplacement de chaque DF $X \to Y$ dans F, telle que $Y = A_1, ..., A_n, n > 1$, par les DFs $X \to A_1, ..., X \to A_n$.

2. Soit F_2 l'ensemble de DFs obtenues par le remplacement de chaque DF $X \to A$ dans F_1 par $X' \to A$ telle que X' est le schéma minimal strictement inclus dans X et $F_1 \vdash X' \to A$.

3. Soit $G = F_2$.

4. Tant qu'il existe $X \to A \in G$ telle que $G - \{X \to A\} \vdash X \to A$, alors

$$G = G - \{X \to A\}$$

5. Retourne G.

Fin.

EXEMPLE 6 *Soit $F = \{AB \to C, B \to A, A \to D, D \to C\}$. Pour chercher une couverture minimale de F, selon l'algorithme Couverture-Minimale,*

1. $F_1 = F$ car les DFs de F sont réduites à droite.

2. Dans F_1, $AB \to C$ est remplacée par $B \to C$, d'où $F_2 = \{B \to C, B \to A, A \to D, D \to C\}$

3. Première iération on obtient $G = \{B \to A, A \to D, D \to C\}$, ensuite, il n'y a plus de DF redondante.

Donc la couverture minimale de F est $G = \{B \to A, A \to D, D \to C\}$.